UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s4nouvellesannal11pari

AEIO PEOE CEDMETTER

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

RÉDIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,

Docteur ès Sciences,
Répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

C. BOURLET,

Docteur ès Sciences,
Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers.

R. BRICARD,

Ingénieur des Manufactures de l'État,
Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, ANTOMARI ET DUPORCQ.

QUATRIÈME SÉRIE.

TOME XI.

(LXXe VOLUME DE LA COLLECTION.)

122542

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1911

QA
1
N8
v. 70

Tous droits de traduction et de reproduction réservés.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

[M³5j]

SUR LA QUATRIÈME CONGRUENCE DE CUBIQUES GAUCHES DE M. STUYVAERT;

PAR M. LUCIEN GODEAUX.

Dans de belles recherches de Géométrie, couronnées par l'Académie royale de Belgique (¹), M. Stuyvaert a défini six types de congruences linéaires de cubiques gauches. Ce sont les congruences dont chaque courbe est représentée par l'évanouissement de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_{11}(x, \alpha) & \varphi_{12}(x, \alpha) & \varphi_{13}(x, \alpha) \\ \varphi_{21}(x, \alpha) & \varphi_{22}(x, \alpha) & \varphi_{23}(x, \alpha) \end{matrix} \right\| = 0,$$

les six fonctions φ étant linéaires par rapport aux coordonnées ponctuelles (x_1, x_2, x_3, x_4) et par rapport aux paramètres $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Parmi ces congruences, les deux premiers types ont été étudiés par M. Stuyvaert (²); j'ai ensuite établi

(¹) *Cinq études de Géométrie analytique* (Prix François Deruyts, 1906). Gand, Librairie Van Gœthem, 1907, p. 94-119 (2ᵉ étude).

(²) *Une congruence linéaire de cubiques gauches* (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1907); *Deuxième congruence linéaire*

qu'une certaine transformation birationnelle de l'espace fournit immédiatement la plupart des propriétés des types I, III et VI [1]. Dans la Note suivante, j'établis une transformation birationnelle de l'espace qui transforme le type IV en une congruence bilinéaire de droites. La même transformation fournit de nouveaux types de congruences linéaires de cubiques que je signale.

Rappelons avant de commencer les propriétés de la congruence IV de M. Stuyvaert. Cette congruence est représentée par la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_1 a_x + \alpha_2 b_x + \alpha_3 c_x & \alpha_1 a'_x + \alpha_3 c'_x & \alpha_1 a''_x + \alpha_3 c''_x \\ \alpha_1 d_x + \alpha_2 f_x & \alpha_1 d'_x & \alpha_1 d''_x \end{matrix} \right\| = 0.$$

Les cubiques qui la forment s'appuient quatre fois sur la sextique de genre trois

$$\left\| \begin{matrix} a_x & a'_x & a''_x & b_x \\ c_x & c'_x & c''_x & 0 \\ d_x & d'_x & d''_x & f_x \end{matrix} \right\| = 0,$$

cinq fois sur la cubique gauche

$$\left\| \begin{matrix} a'_x & c'_x & d'_x \\ a''_x & c''_x & d''_x \end{matrix} \right\| = 0,$$

et une fois sur la droite

$$d'_z = d''_x = 0.$$

La transformation birationnelle T. — 1. Soient

---

de cubiques gauches (*Rendiconti del Circ. Matem. di Palermo*, 1908, t. XXVI).

(1) *Nouveaux types de congruences linéaires de cubiques gauches* (*Nouv. Ann. de Math.*, 4e série, t. IX); *Sur la sixième congruence de cubiques gauches de M. Stuyvaert* (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1909).

C_6^3 une sextique gauche de genre trois et C_3 une cubique gauche dont les équations sont respectivement

$$(C_6^3) \qquad \left\| \begin{matrix} a_x & b_x & c_x & d_x \\ a'_x & b'_x & c'_x & d'_x \\ a''_x & b''_x & c''_x & d''_x \end{matrix} \right\| = 0,$$

$$(C_3) \qquad \left\| \begin{matrix} a_x & a'_x & a''_x \\ b_x & b'_x & b''_x \end{matrix} \right\| = 0.$$

La courbe C_3 s'appuie donc en huit points sur C_6^3 (¹).

Il y a une infinité de surfaces cubiques F, formant un faisceau, qui passent par les courbes C_6^3 et C_3; elles ont pour équation

$$(F) \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ a_x & b_x & c_x & d_x \\ a'_x & b'_x & c'_x & d'_x \\ a''_x & b''_x & c''_x & d''_x \end{vmatrix} = 0,$$

λ_1 et λ_2 étant des paramètres variables.

Désignons par O_1, O_2, O_3, O_4 les sommets du tétraèdre fondamental.

Établissons une homographie H entre les surfaces F et les plans passant par la droite $d \equiv O_2 O_3$. Nous prendrons pour l'équation du plan correspondant à la surface F donnée par le rapport $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$,

$$\lambda_1 y_1 - \lambda_2 y_4 = 0.$$

Une bisécante de la cubique C_3 peut être représentée par les équations

$$(1) \qquad \begin{cases} \mu a_x + \mu' a'_x + \mu'' a''_x = 0, \\ \mu b_x + \mu' b'_x + \mu'' b''_x = 0. \end{cases}$$

(¹) Stuyvaert, *loc. cit.* (Étude I, p. 27).

Si nous écrivons les relations

$$\frac{y_2}{\mu} = \frac{y_3}{\mu'} = \frac{y_4}{\mu''},$$

elles feront correspondre à la droite unissant le point $P(y_1, y_2, y_3, y_4)$ au point O_1, la bisécante de C_3 représentée par les équations (1), et réciproquement. Nous aurons ainsi une correspondance birationnelle K entre la gerbe de sommet O_1 et la congruence des bisécantes de C_3.

La correspondance K est telle qu'au plan

$$v_2 y_2 + v_3 y_3 + v_4 y_4 = 0$$

correspond la quadrique

$$\begin{vmatrix} v_2 & v_3 & v_4 \\ a_x & a'_x & a''_x \\ b_x & b'_x & b''_x \end{vmatrix} = 0.$$

En général, *à un cône d'ordre n et de sommet* O_1, *la transformation* K *fait correspondre une surface d'ordre* $2n$ *passant n fois par* C_3, *et réciproquement.*

2. A l'aide de l'homographie H et de la transformation K, nous pouvons établir une correspondance birationnelle T entre les points (x) et (y) de l'espace. Remarquons pour cela qu'une corde de C_3 rencontre une surface F en trois points dont deux sont sur C_3; les coordonnées du troisième point peuvent donc s'écrire en fonctions rationnelles des coefficients de l'équation de F.

Soient $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$ et $Q(y_1, y_2, y_3, y_4)$ deux points de l'espace. Nous dirons que ces points se cor-

respondent par T si les conditions suivantes sont vérifiées :

a. L'homographie H fait correspondre le plan QO_2O_3 et la surface F passant par P.

b. La droite QO_1 et la corde de C_3 issue de P se correspondent dans la transformation K.

Une telle transformation T est évidemment birationnelle.

ρ étant un facteur de proportionnalité et les déterminants cubiques étant dénotés par leur première ligne, les coordonnées de Q s'exprimeront au moyen de celles de P par les formules

$$(\tau)\quad \begin{cases} \rho y_1 = | a_x \quad b_x \quad d_x | (a_x b'_x - a'_x b_x), \\ \rho y_2 = | a_x \quad b_x \quad c_x | (a'_x b''_x - a''_x b'_x), \\ \rho y_3 = | a_x \quad b_x \quad c_x | (a''_x b_x - a_x b''_x), \\ \rho y_4 = | a_x \quad b_x \quad c_x | (a_x b'_x - a'_x b_x). \end{cases}$$

Dans la suite, nous désignerons par Σ_1, Σ_2 les espaces lieux des points respectivement de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4).

La transformation T mute un plan de Σ_2, d'équation

$$u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 + u_4 y_4 = 0,$$

en une surface du cinquième ordre dont l'équation peut s'écrire

$$(1)\quad \left| \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & u_1 \\ a_x & a'_x & a''_x \\ b_x & b'_x & b''_x \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} u_2 & u_3 & u_4 \\ a_x & a'_x & a''_x \\ b_x & b'_x & b''_x \end{array} \right| \\ \\ | a_x \quad b_x \quad c_x | \; | a_x \quad b_x \quad d_x | \end{array} \right| = 0.$$

La dernière ligne s'annule pour les points de la courbe C_6^3, donc la surface passe par cette courbe. Tous les termes du déterminant précédent s'annulent

pour les points de C_3, donc cette courbe est double pour la surface (1). Enfin, si l'on introduit l'hypothèse

$$(C'_3) \qquad \left\| \begin{matrix} a_x & b_x & c_x \\ a'_x & b'_x & c'_x \end{matrix} \right\| = 0,$$

les termes de la première colonne sont nuls, donc la surface (1) passe simplement par la cubique gauche C'_3.

Les équations des courbes C_6^3, C_3 et C'_3 ne dépendant pas des coefficients u_1, u_2, u_3, u_4, on peut énoncer le théorème suivant :

Les plans de Σ_2 se transforment en des surfaces du cinquième ordre passant simplement par les deux courbes C_6^3, C'_3 et doublement par la cubique C_3.

Les trois courbes C_6^3, C_3 et C'_3 sont évidemment singulières pour la transformation T ; nous allons voir que ce sont les seules dans l'espace Σ_1. Pour cela, il nous suffira de démontrer que l'intersection de deux surfaces telles que (1) se compose de ces courbes et d'une courbe variable du quatrième ordre, ou encore que la courbe de Σ_1 correspondant à une droite de Σ_2, est du quatrième ordre.

La courbe correspondant à la droite

$$u_y = 0, \qquad v_y = 0$$

est représentée par

$$(2) \qquad \left\| \begin{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & u_1 \\ a_x & a'_x & a''_x \\ b_x & b'_x & b''_x \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_2 & u_3 & u_4 \\ a_x & a'_x & a''_x \\ b_x & b'_x & b''_x \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & v_1 \\ a_x & a'_x & a''_x \\ b_x & b'_x & b''_x \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_2 & v_3 & v_4 \\ a_x & a'_x & a''_x \\ b_x & b'_x & b''_x \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_x & b_x & d_x \end{vmatrix} \end{matrix} \right\| = 0.$$

Cette matrice s'annule pour les points d'une courbe du seizième ordre. Mais C_3 annule tous les termes de (2) et C'_3 tous les termes de la première colonne; par suite la courbe du seizième ordre se décompose en trois fois C_3, une fois C'_3 et en une courbe d'ordre quatre mobile.

A une droite de Σ_2 correspond une courbe du quatrième ordre.

Les seules lignes singulières de Σ_1 sont C_6^3, C_3 et C'_3.

3. Recherchons quels lieux engendrent les points de Σ_2 qui correspondent aux points singuliers de Σ_1.

A un point P de C_6^3 correspondent évidemment tous les points d'une droite passant par O_1 et que la transformation K fait correspondre à la corde de C_3 issue de P. Le lieu de telles cordes est une surface d'ordre huit passant quatre fois par C_3; par suite la transformation K la mute en un cône du quatrième ordre de sommet O_1 et la surface correspondant à C_6^3 est déterminée. On peut affirmer que ce cône est dépourvu de singularités, car il est de genre trois, ses génératrices étant en correspondance birationnelle avec les points de C_6^3.

La surface $[C_6^3]$ lieu des points de Σ_2 qui se transforment en des points de C_6^3 est un cône du quatrième ordre de sommet O_1.

Soit $[C_3]$ le lieu des points de Σ_2 qui correspondent aux points de C_3. Pour que le transformé d'un point Q de Σ_2 soit sur C_3, il faut et il suffit que la surface cubique F correspondante au plan O_2O_3Q et la corde de C_3 correspondante à la droite O_1Q, se touchent.

(Le point de contact, qui correspond à Q, est en effet nécessairement sur C_3.)

Le lieu des cordes de C_3 qui touchent une surface F (nécessairement le long de C_3) est une surface d'ordre dix passant cinq fois par C_3 ; la transformation K la mute donc en un cône d'ordre cinq de sommet O_1. L'homographie H fait correspondre à la surface F considérée, un plan passant par O_2O_3 et ce plan rencontre donc $[C_3]$ en une courbe du cinquième ordre. D'autre part, on constate aisément que par un point de O_2O_3 passent deux pareilles courbes, donc la surface $[C_3]$ passe doublement par cette droite et est d'ordre sept. Enfin, une droite issue de O_1 rencontre encore la surface $[C_3]$ en deux points, donc O_1 est un point quintuple.

La surface $[C_3]$, *lieu des points auxquels correspondent des points de* C_3, *est d'ordre sept, passe doublement par la droite* O_2O_3, *et possède un point quintuple* O_1.

Il est facile de montrer qu'à un point de C_3 correspondent les points d'une conique de la surface $[C_3]$. Considérons un point P de C_3 ; au cône projetant C_3 de P, la transformation K fait correspondre un plan π passant par O_1. Une surface cubique F est tangente en P à chaque génératrice du cône, et inversement une seule génératrice touche une surface F en P ; par suite, si nous considérons dans π les faisceaux droites dont les sommets sont O_1 et le point de rencontre de π avec O_2O_3, ils sont homographiques et le lieu des intersections des rayons correspondants est la conique transformée du point P.

Soit enfin $[C'_3]$ la surface transformée de C'_3, nous allons voir qu'elle coïncide avec le plan $O_1O_2O_3$. A ce

plan, la transformation K fait correspondre la quadrique

$$a_x b'_x - a'_x b_x = 0,$$

et l'homographie H, la surface cubique

$$| a_x \quad b_x \quad c_x | = 0.$$

Ces deux surfaces se rencontrent en deux courbes C_3, C'_3. Inversement, à un point de C'_3 correspond une droite du plan $O_1 O_2 O_3$ passant par O_1, par suite.

La surface $[C'_3]$, *lieu des points de* Σ_2 *auxquels correspondent des points de* C'_3, *coïncide avec le plan* $O_1 O_2 O_3$.

Une droite de Σ_2 rencontre les surfaces $[C^3_6]$, $[C_3]$ et $[C'_3]$ respectivement en quatre, sept et un point; on en conclut que :

Aux droites de Σ_2 *correspondent des courbes du quatrième ordre s'appuyant quatre fois sur* C^3_6, *sept fois sur* C_3 *et une fois sur* C'_3.

4. Soit π un plan de Σ_1; d'après la théorie des transformations birationnelles, on sait déjà qu'il lui correspond dans Σ_2 une surface du quatrième ordre. Nous allons voir que cette surface passe par la droite $O_2 O_3$ et est un monoïde dont le sommet est en O_1.

Soit π' un plan passant par $O_2 O_3$. Il lui correspond par H une surface cubique F. Les cordes de C_3 qui s'appuient sur l'intersection de cette surface avec le plan π forment une surface d'ordre six passant trois fois par C_3. La transformation K mute cette surface en un cône cubique de sommet O_1 et π' rencontre donc la surface du quatrième ordre transformée de π en une

cubique, donc cette surface passe simplement par la droite O_2O_3.

A une droite issue de O_1, K fait correspondre une corde de C_3. Par le point d'intersection de celle-ci avec π, passe une surface F. Le plan correspondant à cette surface dans l'homographie H marque un seul point de la transformée de π; par suite cette transformée a un point triple en O_1.

A une droite de Σ_1 correspond dans Σ_2 une courbe du cinquième ordre. Deux surfaces du quatrième ordre, transformées de deux plans de Σ_1, ont donc en commun, outre d, une courbe variable d'ordre cinq et une courbe C_{10} d'ordre dix.

Aux plans de Σ_1 correspondent des monoïdes du quatrième ordre dont le point multiple est en O_1 et qui passent par la droite O_2O_3 et par la courbe C_{10}.

La transformation T possède dans Σ_2 un point singulier isolé, une droite et une courbe d'ordre dix singulières.

5. Désignons par $[O_1]$, $[O_2O_3]$, $[C_{10}]$ les surfaces de Σ_1 dont les points correspondent respectivement au point O_1 et aux points des courbes O_2O_3, C_{10}.

On arrive aisément aux théorèmes suivants :

La surface $[O_1]$ lieu des points de Σ_1 correspondants à O_1 est la surface cubique que l'homographie H fait correspondre au plan $O_1O_2O_3$.

La surface $[O_2O_3]$ lieu des points de Σ_1 correspond à ceux de O_2O_3, est la quadrique transformée du plan $O_1O_2O_3$ au moyen de la transformation K.

Passons à la recherche de la surface $[C_{10}]$.

Sur une surface cubique F, passant par C_6^3 et C_3, il

se trouve six cordes de C_3. A tous les points d'une de ces cordes, correspond un même point unique de Σ_2. Recherchons le lieu C de ce point.

Le lieu des cordes de C_3 appartenant à une surface F, est une surface S du huitième ordre. Considérons en effet un plan π, une droite x extérieure à ce plan et ne rencontrant pas C_3 et deux ponctuelles (X_1), (X_2) de support x. Par un point X_1 passe une corde de C_3; par le point où cette corde rencontre r passe une surface F qui marque sur x trois points X_2. Inversement, à un point X_2 correspondent six points X_1. Une coïncidence des points X_1, X_2 est généralement un point de la surface S; il y a une exception pour le point commun au plan π et à la droite x, qui absorbe une coïncidence. D'après le principe de Chasles, S est donc $9 - 1 = 8$. Cette surface contient C_6^3 et a été rencontrée plus haut.

La transformation K mute S en un cône $[C_6^3]$ du quatrième ordre de sommet O_1. La courbe C se trouve évidemment sur ce cône. Un plan passant par O_1 contient quatre génératrices de $[C_6^3]$; chacune d'elles contient, en dehors de O_1, un et un seul point de C. Sur la surface $[O_1]$, se trouvent six cordes de C_3, donc C passe six fois par O_1 et cette courbe est du dixième ordre; par suite elle coïncide avec C_{10}. Un plan passant par O_2O_3 contient six points de C_{10} en dehors de O_2O_3, donc cette droite est une quadrisécante.

La courbe singulière C_{10} *a un point sextuple en* O_1 *et s'appuie quatre fois sur la droite* O_2O_3.

La surface $[C_{10}]$ *lieu des points de* Σ_1 *correspondant aux points de* C_{10} *est du huitième ordre, passe quatre fois par* C_3 *et une fois par* C_6^3.

Une droite de Σ_1 rencontre $[O_1]$, $[O_2O_3]$, $[C_{10}]$

respectivement en trois, deux et huit points; donc :

Aux droites de Σ_1 *correspondent des courbes du cinquième ordre s'appuyant deux fois sur* O_2O_3; *huit fois sur* C_{10} *et ayant un point triple en* O_1.

On remarquera que C_{10} fait partie de l'intersection de $[C_6^3]$ et de $[C_3]$, d'après la théorie des transformations birationnelles. On vérifiera alors aisément que $[C_3]$ passe doublement par C_{10}, car une droite issue de O_1 et s'appuyant sur C_{10} ne rencontre $[C_3]$ qu'en deux points distincts.

Congruences linéaires de cubiques gauches. — 6. La transformation T mute une droite a de Σ_2 s'appuyant sur la droite O_2O_3, en une courbe du quatrième ordre qui dégénère en une cubique gauche γ et une bisécante a' de C_3.

Si P est le point d'appui de a sur O_2O_3, la droite a' correspond, par la transformation K, à la droite PO_1; cette droite a' se trouve donc sur la quadrique

$$a_x b'_x - a'_x b_x = 0,$$

et s'appuie ainsi en un point sur C'_3. En utilisant un théorème précédent, nous pouvons énoncer celui-ci :

A une droite de Σ_2 *s'appuyant sur la droite* O_2O_3 *correspond dans* Σ_1 *une cubique gauche s'appuyant en quatre points sur* C_6^3 *et en cinq points sur* C_3.

Supposons que la droite a appartiennent à une congruence linéaire G (O_2O_3 étant naturellement singulière pour cette congruence). Les cubiques γ correspondantes formeront évidemment une congruence Γ dont l'ordre est égal à l'unité, car si par un point P

de Σ_1 passaient plusieurs courbes de Γ, par le point de Σ_2 correspondant à P passeraient plusieurs droites de G, ce qui n'a généralement pas lieu.

La classe de Γ est, comme on sait, le nombre de ses courbes γ s'appuyant en deux points sur une droite. En transformant au moyen de T, on voit que la classe de Γ est le nombre de droites de G s'appuyant en deux points sur une courbe d'ordre cinq possédant un point triple en O_1 et deux points simples sur O_2O_3.

Nous examinerons les différents cas qui peuvent se présenter pour les congruences Γ.

7. Prenons pour G la congruence formée par les droites s'appuyant sur O_2O_3 et sur une courbe D, d'ordre n, s'appuyant $n-1$ fois sur O_2O_3 m fois sur C_{10} (¹) et enfin passant m_1 fois par O_1 (m_1 étant égal à zéro ou un).

La transformée de D, débarrassée des composantes provenant des points communs à D et aux éléments singuliers de T dans Σ_2, est une courbe Δ d'ordre $3n-m+1-3m_1$. La congruence Γ est donc le lieu des cubiques gauches γ s'appuyant en un point sur Δ.

La courbe Δ s'appuie sur C_6^3, C_3, C'_3 respectivement en $4(n-m_1)-m$, $5n-2m+2-5m_1$, $1-m_1$ points ; ces points d'appui sont fournis par les intersections de D avec les surfaces $[C_6^3]$, $[C_3]$, $[C'_3]$ en dehors des points singuliers de T dans Σ_2.

Passons à la recherche de la classe de Γ. Les bisécantes d'une courbe du cinquième ordre transformée d'une droite de Σ_2, s'appuyant sur O_2O_3, forment une surface d'ordre cinq passant deux fois par O_2O_3 et ayant un point triple en O_1. Cela étant, d'après la

(¹) En dehors de O_1.

remarque faite tantôt, la classe de Γ sera le nombre des points d'intersection de D avec cette surface, en dehors de O_2O_3 et de O_1 ; c'est-à-dire $3n+2-3m_1$.

Selon que m prendra les valeurs 0 ou 1, nous obtiendrons deux congruences Γ_1, Γ_2 dont nous résumerons les propriétés dans les tableaux à double entrée suivants (le nombre placé à l'intersection d'une ligne et d'une colonne fournit le nombre de points communs aux deux courbes de tête) :

	C_6^3	C_3	C_3'	Δ	γ
C_6^3		8	8	$4n-m$	4
C_3	8		5	$5n-2m+2$	5
C_3'	8	5		1	0
Δ	$4n-m$	$5n-2m+2$	1		1
γ	4	5	0	1	

(Γ_1) (classe $= 3n+2$).

	C_6^3	C_3	Δ	γ
C_6^3		8	$4n-m-4$	4
C_3	8		$5n-2m-3$	5
Δ	$4n-m-4$	$5n-2m+3$		1
γ	4	5	1	

(Γ_2) (classe $= 3n-1$).

On voit que la congruence IV de M. Stuyvaert s'obtient pour $n=1$, $m=0$; car Δ devient alors une bisécante de C_3.

La transformation T *mute les cubiques de la*

congruence IV *de M. Stuyvaert en les droites d'une congruence bilinéaire.*

8. La congruence G peut être formée par des faisceaux de rayons dont les plans passent par O_2O_3 et dont les sommets sont sur cette droite, un point de O_2O_3 étant le sommet de n faisceaux et un plan par O_2O_3 contenant un seul faisceau.

Les cubiques de la congruence Γ correspondante se distribuent par faisceaux sur les surfaces du troisième ordre F passant par C_6^3 et C_3, une surface contenant un seul faisceau.

Le centre d'un faisceau de rayons de G, étant sur O_2O_3, est transformé en une droite de la quadrique $[O_2O_3]$, dont l'équation est

$$a_x b'_x - a'_x b_x = 0.$$

Une telle droite est donc rencontrée par les cubiques de n faisceaux de Γ. Une surface F ne contenant qu'un seul de ces faisceaux et toutes les surfaces F ne contenant pas les génératrices de $[O_2O_3]$, les cubiques d'un faisceau de Γ passent par un même point de la génératrice correspondante de la quadrique $[O_2O_3]$.

Pour chercher la classe de Γ, considérons la surface S_5 lieu des bisécantes de la transformée d'une droite de Σ_1, s'appuyant sur O_2O_3; cette droite est double pour S_5. Soient (X_1), (X_2) deux ponctuelles situées sur O_2O_3. Par un point X_1 menons les deux génératrices de S_5, les plans passant par O_2O_3 et contenant ces génératrices contiennent chacun un faisceau de droites de G; les sommets de ces faisceaux marquent sur O_2O_3 deux points X_2. Inversement, à un point X_2 correspondent $3n$ points X_1. D'après le principe de Chasles, il y a $3n+2$ coïncidences et Γ est de classe $3n+2$ d'après la remarque faite plus haut.

Si l'on établit une correspondance (n, 1) *entre les surfaces cubiques* F *passant par* C_6^3, C_3 *et les génératrices bisécantes de* C_3 *de la quadrique*

$$a_x b'_x - a'_x b_x = 0,$$

la cubique gauche s'appuyant quatre fois sur C_6^3, *cinq fois sur* C_3 *et une fois sur la génératrice de la quadrique correspondant à la surface* F *sur laquelle cette cubique se trouve, engendre une congruence* Γ_3 *d'ordre un et de classe* $3n+2$.

9. A une droite de Σ_1 correspond une courbe d'ordre cinq ; à un point de C'_3 correspond une droite passant par O_1 et s'appuyant sur O_2O_3. On en conclut qu'à une bisécante de C'_3 correspond dans Σ_2 une courbe d'ordre cinq dégénérée en deux droites passant par O_1 et situées dans le plan $O_1O_2O_3$, et une cubique gauche γ passant par O_1 et s'appuyant encore huit fois sur C_{10}. Les bisécantes de C'_3 forment une congruence linéaire, par suite les courbes γ' forment une congruence linéaire Γ_4.

Par un raisonnement employé plus haut, on verra que la classe de Γ_4 est le nombre de bisécantes de C'_3 s'appuyant en deux points sur la transformée d'une droite de Σ_2. Une telle courbe est d'ordre quatre et s'appuie une fois sur C'_3 ; par suite la classe cherchée est égale à quinze.

Les cubiques s'appuyant en huit points sur une courbe du dixième ordre et passant par un point sextuple de cette courbe, forment une congruence Γ_4 *d'ordre un et de classe quinze.*

10. Prenons pour C_6^3 et C_3 les équations employées

par M. Stuyvaert et rappelées dans l'introduction de ce travail, c'est-à-dire

$$(C_6^3) \qquad \left\| \begin{matrix} a_x & a'_x & a''_x & b_x \\ c_x & c'_x & c''_x & 0 \\ d_x & d'_x & d''_x & f_x \end{matrix} \right\| = 0.$$

$$(C_3) \qquad \left\| \begin{matrix} a'_x & c'_x & d'_x \\ a''_x & c''_x & d''_x \end{matrix} \right\| = 0.$$

La cubique C'_3 a maintenant pour équations

$$(C'_3) \qquad \left\| \begin{matrix} a'_x & a''_x & b_x \\ c'_x & c''_x & 0 \end{matrix} \right\| = 0,$$

et dégénère donc en une droite et une conique.

Les équations de la transformation T deviennent

$$\begin{aligned} y_1 : y_2 : y_3 : y_4 \\ = \begin{vmatrix} a_x & a'_x & a''_x \\ c_x & c'_x & c''_x \\ d_x & d'_x & d''_x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a'_x & c'_x \\ a''_x & c''_x \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a'_x & a''_x & b_x \\ c'_x & c''_x & 0 \\ d'_x & d''_x & f_x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c'_x & d'_x \\ c''_x & d''_x \end{vmatrix} \\ : \begin{vmatrix} a'_x & a''_x & b_x \\ c'_x & c''_x & 0 \\ d'_x & d''_x & f_x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_x & a'_x \\ d'_x & d''_x \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a'_x & a''_x & b_x \\ c'_x & c''_x & 0 \\ d'_x & d''_x & f_x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a'_x & c'_x \\ a''_x & c''_x \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Cette transformation fait correspondre aux cubiques gauches de la congruence de M. Stuyvaert les droites s'appuyant sur les droites

$$y_2 = y_4 = 0, \qquad y_2 = y_3 = 0.$$

On ramènera par la transformation T toute propriété d'une congruence bilinéaire de droites à une propriété de la congruence de cubiques.

[D4c]

SUR LE DÉVELOPPEMENT DE TAYLOR D'UNE FONCTION MÉROMORPHE;

PAR M. G. VALIRON.

M. Borel a démontré la proposition suivante :

Une fonction méromorphe, dans tout le plan, ne peut être représentée par une série

$$\sum_1^\infty \frac{a_n}{b_n} x^n,$$

où a_n et b_n sont des entiers et où $\sqrt[n]{|b_n|}$ reste fini lorsque $|b_n|$ ne renferme pas de facteurs premiers dont le module soit infini avec n, à moins qu'elle ne se réduise à une fraction rationnelle à coefficients entiers [1].

On peut, dans une certaine mesure, étendre le théorème au cas où le dénominateur contient des facteurs premiers qui deviennent infinis avec n. On a le résultat suivant.

La série

$$\sum_1^\infty \frac{a_n x^n}{b_n \prod_1^p (n + k_i)},$$

où a_n et b_n sont des entiers réels ou complexes, $|b_n|$ satisfaisant aux conditions précédentes et où les p

[1] Voir BOREL, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 1894, et *Leçons sur les fonctions méromorphes*, p. 37. — HADAMARD, *La série de Taylor et son prolongement analytique*, p. 97.

nombres $k_1 \ldots k_p$ sont entiers et réels, ne peut représenter une fonction méromorphe dans tout le plan.

(Lorsque certains des nombres k_i sont négatifs les coefficients ne sont de la forme indiquée qu'à partir d'une certaine valeur de n).

Posons

$$f(x) = \sum_1^\infty \frac{a_n x^n}{b_n \prod_1^p (n + k_i)}.$$

Si $f(x)$ est une fonction méromorphe il en est de même de la fonction

$$f_1(x) = x^{k_p} f(x) = \sum_1^\infty \frac{a_n x^{n+k_p}}{b_n \prod_1^p (n + k_i)},$$

et par conséquent de sa dérivée

$$f_2(x) = f_1(x) = \sum_1^\infty \frac{a_n x^{n+k_p-1}}{b_n \prod_1^{p-1} (n + k_i)},$$

cette dérivée est de la même forme que $f(x)$ avec un terme de moins en dénominateur. (Il est nécessaire, lorsque k_p est négatif, de supprimer un certain nombre de termes qui contiennent des puissances négatives de x).

En opérant de même avec $f_2(x)$ et ainsi de suite on arrivera à la fonction

$$f_{2p}(x) = \sum_1^\infty \frac{a_n x^{n+k_1+\ldots+k_p}}{b_n},$$

qui devra être une fonction méromorphe. Mais ce ne peut être qu'une fraction rationnelle à coefficients en-

tiers d'après le théorème de M. Borel. La fonction $f(x)$ et toutes les fonctions intermédiaires sont donc aussi des fractions rationnelles puisqu'elles ont les mêmes pôles que $f_{2p}(x)$.

Mais on sait que lorsque la fonction primitive d'une fraction rationnelle est une fraction rationnelle, on l'obtient par des opérations rationnelles, donc en remontant de proche en proche la suite des fonctions $f_{2p-1}(x), \ldots f(x)$, on voit que toutes ces fonctions sont des fonctions rationnelles à coefficients entiers.

Finalement l'hypothèse que $f(x)$ est méromorphe dans tout le plan conduit à la conclusion que c'est une fraction rationnelle à coefficients entiers, ce qui est impossible, car le développement en série d'une telle fonction est de la forme

$$\sum_1^\infty \frac{a_n}{b_n} x^n,$$

$|b_n|$ satisfaisant à la condition énoncée. Par conséquent le développement

$$\sum_1^\infty \frac{a_n x^n}{b_n \prod_1^p (n + k_i)},$$

ne peut pas représenter une fonction méromorphe dans tout le plan.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1910).

COMPOSITION SUR LE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL [1].

SOLUTION PAR M. TURRIÈRE.

On considère la famille de quadriques (Q)

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = \text{const.},$$

a, b, c étant des nombres distincts donnés [2], les axes coordonnés étant rectangulaires. Les courbes (γ) trajectoires orthogonales de ces quadriques sont les intégrales du système

$$\frac{dx}{ax} = \frac{dy}{by} = \frac{dz}{cz},$$

et leurs équations sont

$$x = x_0 t^a, \qquad y = y_0 t^b, \qquad z = z_0 t^c,$$

x_0, y_0, z_0 étant des constantes et t étant un paramètre; pour simplifier les calculs, je poserai $t = e^u$ et prendrai pour équations des courbes (γ) :

$$(\gamma) \qquad x = x_0 e^{au}, \qquad y = y_0 e^{bu}, \qquad z = z_0 e^{cu}.$$

---

(1) *Voir* l'énoncé page 403 des *Nouvelles Annales* de 1910.

(2) Sauf avis contraire, je ne fais aucune restriction relativement aux signes de a, b, c.

Les surfaces (S) trajectoires orthogonales des quadriques (Q) sont intégrales de l'équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre

$$(E) \qquad axp + byq = cz;$$

les caractéristiques de cette équation sont les courbes (γ).

Pour définir l'intégrale générale (S), il suffit de se donner une courbe distincte d'une caractéristique

$$x = x_0(v), \qquad y = y_0(v), \qquad z = z_0(v),$$

et de résoudre le problème de Cauchy pour cette courbe imposée; on est ainsi conduit aux équations paramétriques suivantes de l'intégrale générale (S) :

$$x = x_0(v)e^{au}, \qquad y = y_0(v)e^{bu}, \qquad z = z_0(v)e^{cu};$$

la courbe imposée est la courbe $u = 0$; les caractéristiques sont les courbes coordonnées $v = \text{const}$.

Il résulte de ces équations que *l'équation générale des surfaces* (S) *s'obtient en égalant à zéro une fonction homogène quelconque de* $x^{\frac{1}{a}}, y^{\frac{1}{b}}, z^{\frac{1}{c}}$ [1].

Comme exemples remarquables, je citerai des surfaces d'équation

$$Ax^{\frac{m}{a}} + By^{\frac{m}{b}} + Cz^{\frac{m}{c}} = 0,$$

A, B, C, m étant des constantes quelconques. Plus particulièrement encore, pour $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, on obtient trois familles de cylindres.

---

[1] Dans toutes les questions concernant les trajectoires orthogonales de surfaces, il y a lieu de chercher s'il existe un système triple-orthogonal constitué par ces surfaces et deux familles de surfaces trajectoires, et il y a le plus grand intérêt à mettre ce système en évidence. Dans le cas actuel de quadriques (Q) concentriques et homothétiques, il n'existe pas de tel système, conformément d'ailleurs au théorème de M. Maurice Lévy.

Comme autre exemple, je citerai les surfaces

$$x^{\frac{\alpha}{a}} y^{\frac{\beta}{b}} z^{\frac{\gamma}{c}} = \text{const.},$$

α, β, γ étant trois constantes assujetties à la condition

$$\alpha + \beta + \gamma = 0.$$

Ces surfaces rentrent dans le type des surfaces

$$x^{\lambda} y^{\mu} z^{\nu} = \text{const.},$$

qui furent étudiées par Lie et par Klein. Pour $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, on a trois familles de cylindres identiques aux précédentes.

I. Nous avons trouvé les équations

$$(S) \qquad x = x_0 e^{au}, \qquad y = y_0 e^{bu}, \qquad z = z_0 e^{cu},$$

pour représenter les surfaces (S) : x_0, y_0, z_0 sont trois fonctions arbitraires d'un paramètre v. Ce sont bien là des expressions de la forme spécifiée dans l'énoncé.

Déterminons les asymptotiques de cette surface (S). Les déterminants D, D′, D″ de Gauss (notations de M. Darboux) ont pour expressions

$$D = D_1 e^{(a+b+c)u}, \qquad D' = D'_1 e^{(a+b+c)u}, \qquad D'' = D''_1 e^{(a+b+c)u},$$

en désignant par D_1, D'_1, D''_1 trois fonctions de v seul :

$$D_1 = \begin{vmatrix} a^2 x_0 & b^2 y_0 & c^2 z_0 \\ a x_0 & b y_0 & c z_0 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \end{vmatrix} = \Sigma\, bc(b-c) x'_0 y_0 z_0,$$

$$D'_1 = \begin{vmatrix} a x'_0 & b y'_0 & c z'_0 \\ a x_0 & b y_0 & c z_0 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \end{vmatrix} = \Sigma\, a(c-b) x_0 y'_0 z'_0,$$

$$D''_1 = \begin{vmatrix} x''_0 & y''_0 & z''_0 \\ a x_0 & b y_0 & c z_0 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \end{vmatrix} = \Sigma\, x''_0 (b y_0 z'_0 - c z_0 y'_0);$$

$x'_0, y'_0, z'_0, x''_0, y''_0, z''_0$ désignent les dérivées des trois fonctions x_0, y_0, z_0 de la variable v.

De la circonstance remarquable que D, D′, D″ sont proportionnels à trois fonctions de v seul, il résulte que les asymptotiques sont déterminables par quadratures. Leur équation différentielle étant

$$D_1\, du^2 + 2 D'_1\, du\, dv + D''_1\, dv^2 = 0,$$

les deux familles d'asymptotiques sont représentées par l'équation

$$u + \int \frac{D'_1}{D_1} dv + \varepsilon \int \frac{\sqrt{D'^2_1 - D_1 D''_1}}{D_1} dv = \text{const.},$$

où l'on fait successivement $\varepsilon = 1$ et $\varepsilon = -1$. L'ensemble des asymptotiques dépend donc de deux quadratures.

Ce résultat de pur calcul tient à une propriété projective de toute surface (S) d'être invariante dans la transformation homographique particulière

$$x = \rho^a X, \qquad y = \rho^b Y, \qquad z = \rho^c Z,$$

dépendant du paramètre ρ [1].

II. Pour que la courbe imposée $u = 0$ soit asymptotique de (S), il faut et il suffit que D″ et, par conséquent, D''_1 soient nuls.

Par le fait que la courbe imposée est asymptotique, toutes les courbes $u =$ const. *sont des asymptotiques.*

---

[1] On remarquera l'analogie d'équation et de génération des surfaces (S) et des cônes ayant l'origine des coordonnées pour sommet; la transformation homographique précédente est analogue à l'homothétie ayant ce point pour pôle.

La condition trouvée exprime que la courbe imposée jouit de la propriété géométrique suivante : En tout point M de cette courbe, le rayon vecteur OM et la binormale sont conjugués en direction par rapport à toute quadrique (Q).

Cette relation est une sorte d'équation de Monge-Pfaff du second ordre ; sur une surface quelconque de l'espace, elle se réduit à une équation différentielle du second ordre; par suite, sur toute surface, il y a au moins une intégrale de cette équation, distincte d'une caractéristique de (E). On ne diminue donc pas la généralité du problème de Cauchy, en le résolvant pour la courbe intégrale générale de cette relation $D''_1 = 0$; en d'autres termes, si l'on résout le problème de Cauchy pour la courbe la plus générale qui satisfait à cette relation, on aura l'intégrale générale (S) de (E). On connaîtra alors une famille d'asymptotiques

$$u = \text{const.};$$

l'autre famille sera définie par une équation réductible à une quadrature

$$du = -2\frac{D'_1}{D_1}dv.$$

Or, pour trouver toutes les courbes qui satisfont à la relation $D''_1 = 0$, il suffit de considérer une solution de chacune des trois équations différentielles linéaires du second ordre :

$$x''_0 = Lx'_0 + Max_0,$$
$$y''_0 = Ly'_0 + Mby_0,$$
$$z''_0 = Lz'_0 + Mcz_0.$$

dans lesquelles L et M sont deux fonctions arbitraires de v : si x_0, y_0, z_0 sont trois solutions, la courbe, lieu du point (x_0, y_0, z_0) lorsque v varie, est une courbe pour laquelle D''_1 est nul.

Considérons l'une de ces trois équations analogues; soit

$$x''_0 = \mathrm{L}x'_0 + \mathrm{M}\alpha x_0;$$

en posant (α étant une constante arbitraire)

$$x_0 = \alpha e^{a\int \mathrm{V}_1 dv},$$

cette équation homogène se transforme en une équation de Riccati

$$\mathrm{V}'_1 = \mathrm{M} + \mathrm{L}\mathrm{V}_1 - \alpha \mathrm{V}_1^2.$$

Une telle équation n'est pas intégrable, en général, mais on peut profiter du fait que L et M sont deux fonctions arbitraires de v pour se donner *a priori* deux intégrales de cette équation de Riccati : l'intégrale générale s'obtient alors par une quadrature.

Passons maintenant à l'étude de l'enveloppe des asymptotiques. Considérons une surface (S) et une asymptotique distincte d'une caractéristique de l'équation (E) : imposons cette asymptotique comme courbe $u =$ const. ; toutes les courbes $u =$ const. sont alors des asymptotiques d'une même famille. En excluant des surfaces particulières sur lesquelles nous reviendrons au 3°, les asymptotiques d'une famille peuvent donc être représentées par l'équation $u =$ const. : ce sont les courbes

$$x = x_0(v)\rho^{au}, \qquad y = y_0(v)\rho^{bu}, \qquad z = z_0(v)\rho^{cu},$$

correspondant aux diverses valeurs de u. Supposons que ces courbes aient une enveloppe; cette enveloppe sera une courbe d'équations

$$x = \varphi(u), \qquad y = \chi(u), \qquad z = \psi(u);$$

il doit exister une fonction v de u rendant compatibles

les équations

$$x_0(v)e^{au} = \varphi(u), \qquad y_0(v)e^{bu} = \chi(u), \qquad z_0(v)e^{cu} = \psi(u),$$
$$x'_0 \frac{dv}{du} = \varphi'(u)e^{-au} - a\varphi(u)e^{-au}, \qquad \ldots, \qquad \ldots;$$

il en résulte que l'on a

$$\frac{d\varphi}{a\varphi} = \frac{d\chi}{b\chi} = \frac{d\psi}{c\psi},$$

c'est-à-dire que l'enveloppe, si elle existe, est une caractéristique de l'équation (E). Soit $v = v_0$ l'équation de cette caractéristique ; pour $v = v_0$ on a alors

$$\frac{x'_0}{ax_0} = \frac{y'_0}{by_0} = \frac{z'_0}{cz_0},$$

et réciproquement.

La condition nécessaire et suffisante d'existence de l'enveloppe de la famille $u =$ const. *d'asymptotiques est donc que les équations en* v

$$\frac{x'_0}{ax_0} = \frac{y'_0}{by_0} = \frac{z'_0}{cz_0}$$

soient compatibles pour une certaine valeur v_0 *de* v ; *l'enveloppe est la caractéristique* $v = v_0$.

Cette condition exprime que la *courbe imposée est tangente à une caractéristique particulière ;* ou encore, ce qui revient au même, *que la courbe imposée est normale à une quadrique* (Q) *particulière.*

Proposons-nous maintenant de déterminer toutes les surfaces (S) dont une famille d'asymptotiques est douée d'enveloppe ; observons que la condition

$$\frac{x'_0}{ax_0} = \frac{y'_0}{by_0} = \frac{z'_0}{cz_0}$$

devient

$$V_1 = V_2 = V_3,$$

en posant, comme précédemment,

$$x_0 = \alpha e^{a\int V_1 dv}, \qquad y_0 = \beta e^{b\int V_2 dv}, \qquad z_0 = \gamma e^{c\int V_3 dv},$$

α, β, γ étant trois constantes arbitraires, et V_1, V_2, V_3 trois fonctions de V.

On considérera donc les trois équations de Riccati suivantes :

$$V'_1 = M + LV_1 - aV_1^2,$$
$$V'_2 = M + LV_2 - bV_2^2,$$
$$V'_3 = M + LV_3 - cV_3^2,$$

L et M étant deux fonctions arbitraires de v ; on se donnera deux nombres quelconques v_0 et V_0, et l'on considérera la solution de chacune de ces trois équations qui se réduit à V_0 pour $v = v_0$. Les trois fonctions V_1, V_2, V_3 ainsi obtenues conviennent à la surface générale cherchée.

On aura des exemples simples en particularisant les fonctions L et M, en prenant L et M constants, par exemple.

Exemple I. — Parmi les surfaces (S), il en est qui sont réglées : elles sont représentées par les équations

$$x = (\alpha v + \alpha_0)e^{au}, \quad y = (\beta v + \beta_0)e^{bu}, \quad z = (\gamma v + \gamma_0)e^{cu};$$

leurs asymptotiques sont les courbes $u =$ const., et les courbes

$$u = -2\Sigma a(c-b)\beta\gamma\alpha_0 \int \frac{dv}{R(v)},$$

où $R(v)$ est un polynome du second degré en v

$$R(v) = -\alpha\beta\gamma(a-b)(b-c)(c-a)v^2$$
$$+ v\Sigma bc(b-c)\alpha(\beta\gamma_0 + \gamma\beta_0) + \Sigma bc(b-c)\alpha\beta_0\gamma_0.$$

Pour un choix convenable des constantes, si l'ex-

pression

$$\Sigma a(c-b)\beta\gamma\alpha_0$$

est nulle, les deux familles d'asymptotiques sont confondues suivant les génératrices rectilignes $u = \text{const.}$, les surfaces (S) correspondantes sont développables. C'est le résultat que l'on obtient en appliquant ce qui précède au cas $L = 0$, $M = 0$; on trouve ainsi les surfaces développables

$$\begin{aligned} x &= \alpha(av+1)t^a, \\ y &= \beta(bv+1)t^b, \\ z &= \gamma(cv+1)t^c; \end{aligned}$$

l'arête de rebroussement est la courbe $v = 0$.

Exemple II. — Comme second exemple, je prendrai L nul et M constant; en supposant a, b, c tous trois positifs, si l'on pose

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha(\operatorname{ch}\sqrt{a}v + \sqrt{a}\operatorname{sh}\sqrt{a}v), \\ y_0 &= \beta(\operatorname{ch}\sqrt{b}v + \sqrt{b}\operatorname{sh}\sqrt{b}v), \\ z_0 &= \gamma(\operatorname{ch}\sqrt{c}v + \sqrt{c}\operatorname{sh}\sqrt{c}v), \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha(\cos\sqrt{a}v + \sqrt{a}\sin\sqrt{a}v), \\ y_0 &= \beta(\cos\sqrt{b}v + \sqrt{b}\sin\sqrt{b}v), \\ z_0 &= \gamma(\cos\sqrt{c}v + \sqrt{c}\sin\sqrt{c}v), \end{aligned}$$

on obtient des surfaces (S) pour lesquelles les asymptotiques $u = \text{const.}$ ont pour enveloppe la caractéristique $v = 0$. Lorsque $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ sont proportionnels à des nombres rationnels, les surfaces obtenues sont unicursales, ainsi que les courbes coordonnées (u) et (v).

Examinons maintenant les particularités d'une surface (S) au voisinage de l'enveloppe d'une famille

d'asymptotiques. Tout ce que l'on peut dire des surfaces (S) est une conséquence des propriétés générales de l'enveloppe d'une famille d'asymptotiques d'une surface quelconque. On sait que la seconde famille d'asymptotiques a la même enveloppe, qu'en un point de contact les directions asymptotiques sont confondues, qu'en un tel point l'indicatrice se décompose en deux droites parallèles. La courbure totale de la surface le long de l'enveloppe est nulle, ainsi que la torsion des asymptotiques ; le plan osculateur de l'asymptotique au point de contact a un contact d'ordre supérieur avec la courbe.

III. Nous avons implicitement supposé plus haut que la famille d'asymptotiques $u = \text{const.}$ n'était pas constituée par les caractéristiques de l'équation (E). Étant donnée l'équation

$$f(p, q, x, y, z) = axp + byq - cz = 0,$$

la condition donnée par Lie pour que les caractéristiques soient asymptotiques de toute intégrale n'est pas satisfaite, car on a

$$\frac{\partial f}{\partial p}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right) + \frac{\partial f}{\partial q}\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right) = a^2xp + b^2yq - c^2z = 0;$$

ce ne sera donc que sur des surfaces (S) particulières que les caractéristiques seront des asymptotiques ; ces surfaces seront les intégrales communes aux deux équations linéaires

$$\begin{aligned} axp + byq - cz &= 0, \\ a^2xp + b^2yq - c^2z &= 0; \end{aligned}$$

elles seront donc orthogonales non seulement aux quadriques (Q), *mais encore aux quadriques*

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = \text{const.}$$

Telle est la définition géométrique demandée des surfaces que nous allons étudier (¹) : on observera combien puissante est la méthode de Lie puisqu'elle permet de déterminer et de définir ces surfaces sans connaître l'intégrale générale de l'équation (E).

Reprenons maintenant la même question sous un autre point de vue. Les caractéristiques $v = \text{const.}$ devant être des asymptotiques, le déterminant D_1 doit être nul. On obtiendra donc les surfaces cherchées en choisissant pour courbe de Cauchy une intégrale quelconque de l'équation de Pfaff (²)

$$bc(b-c)x'_0 y_0 z_0 + ca(c-a)y'_0 z_0 x_0 + ab(a-b)z'_0 x_0 y_0 = 0;$$

(¹) Comme autres propriétés géométriques des surfaces

$$x^{bc(b-c)} y^{ca(c-a)} z^{ab(a-b)} = \text{const.},$$

on peut signaler celles qui ont été données par Lie et par Klein. On peut encore considérer les surfaces

$$x^{\lambda} y^{\mu} z^{\nu} = \text{const.}$$

comme se transformant en des plans par la *logarithmische Albildung* de Sophus Lie, cette transformation curieuse qui lui a permis de déduire de tout plan une surface qui est de translation d'une infinité de façons.

(²) A cause de ce qui a été dit au début du 2° et de ce qui va être dit au début du 4°, une remarque s'impose pour expliquer comment en prenant une intégrale générale de l'équation de Pfaff ci-dessus considérée et en résolvant le problème de Cauchy pour cette courbe, on n'obtient pas l'intégrale générale de l'équation (E). Étant donnée une surface quelconque, sur cette surface, l'équation de Pfaff devient une équation différentielle de premier ordre; si la surface est la surface intégrale de l'équation (E) (exception étant faite pour les surfaces $x^{bc(b-c)} y^{ca(c-a)} z^{ab(a-b)} = \text{const.}$) cette équation différentielle définit précisément les caractéristiques qui engendrent l'intégrale considérée. Il n'existe donc pas sur l'intégrale générale de (E), sauf exception, d'intégrale de l'équation de Pfaff qui soit distincte d'une caractéristique.

celle-ci s'écrit

$$\frac{d}{dv}\left(x_0^{bc(b-c)}y_0^{ca(c-a)}z_0^{ab(a-b)}\right)=0;$$

l'ensemble des intégrales de l'équation de Pfaff est donc constituée par les courbes tracées sur les surfaces

$$x_0^{bc(b-c)}y_0^{ca(c-a)}z_0^{ab(a-b)}=\text{const.}$$

On se donne donc une telle courbe distincte d'une caractéristique et l'on doit résoudre pour cette courbe le problème de Cauchy. Or, d'après ce qui a été dit au début du problème, les surfaces précédentes sont des intégrales (S) particulières : les surfaces cherchées ne sont donc autres que les surfaces

$$x^{bc(b-c)}y^{ca(c-a)}z^{ab(a-b)}=\text{const.};$$

on vérifie immédiatement qu'elles sont trajectoires orthogonales des quadriques

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=\text{const.}$$

On peut prendre pour équations paramétriques de ces surfaces

$$x=\alpha t^{a(b-c)a^2},$$
$$y=\beta t^{b(c-a)b^2},$$
$$z=\gamma t^{c(a-b)c^2},$$

ou les équations équivalentes :

$$x=\alpha e^{au+a^2v},$$
$$y=\beta e^{bu+b^2v},$$
$$z=\gamma e^{cu+c^2v};$$

pour une telle surface, rapportée aux courbes (u) et (v), on a

$$D=0,$$
$$D'=abc(a-b)(b-c)(c-a)xyz,$$
$$D''=abc(a-b-c)(a-b)(b-c)(c-a)xyz,$$

et les asymptotiques [1] sont donc les courbes

$$v = \text{const.} \qquad \text{et} \qquad 2u + (a + b + c)v = \text{const.}$$

N'ayant fait aucune hypothèse de signes sur a, b, c, je peux, en particulier, considérer le cas $a + b + c = 0$: *dans le cas de quadriques* (Q) *équilatères, les asymptotiques de la surface considérée sont donc les courbes coordonnées* $u = \text{const.}$ *et* $v = \text{const.}$; on observera que, *dans ce même cas, ces surfaces* (S) *particulières sont orthogonales non seulement aux quadriques* (Q) *et aux quadriques d'équation :*

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = \text{const.},$$

mais encore aux quadriques d'équation :

$$a^4x^2 + b^4y^2 + c^4z^2 = \text{const.}$$

IV. En général, les courbes coordonnées ne sont pas conjuguées sur la surface (S) [2]. Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire et suffisant que D' soit nul, c'est-à-dire que la courbe imposée soit intégrale de l'équation de Monge

$$a(b - c)x_0y'_0z'_0 + b(c - a)y_0z'_0x'_0 + c(a - b)z_0x'_0y'_0 = 0;$$

---

[1] Il y a lieu d'examiner si les asymptotiques $v = \text{const.}$ admettent ou non une enveloppe : ce serait là un exemple d'enveloppe d'autant plus remarquable que cette enveloppe serait courbe intégrale de l'équation (E). On s'assure aisément que cette enveloppe n'existe pas.

[2] Les surfaces d'équations :

$$x = f(v) \times f_1(u),$$
$$y = \varphi(v) \times \varphi_1(u),$$
$$z = \psi(v) \times \psi_1(u),$$

telles que les courbes coordonnées sont conjuguées, ont donné lieu à divers Mémoires de Péterson, M. Jamet, Lie et Raffy.

on reconnaît l'équation de Monge que Lie associe au complexe tétraédral constitué par les normales aux quadriques (Q). *La condition pour que les courbes coordonnées soient conjuguées sur la surface* (S) *est que la courbe de Cauchy soit une courbe de ce complexe tétraédral.* S'il en est ainsi, toutes les courbes $u =$ const. sont des courbes de ce même complexe.

Sur une surface (S) intégrale générale de (E), cette équation de Monge se réduit à une équation différentielle distincte de l'équation différentielle des caractéristiques situées sur cette surface. Il en résulte que, sans diminuer la généralité du problème de Cauchy, on peut choisir la courbe imposée parmi les courbes déterminées par Lie et dont les tangentes appartiennent au complexe tétraédral. La surface (S) sera alors rapportée à un système conjugué, les courbes $v =$ const. étant les caractéristiques de (E).

Considérons alors une surface quelconque (S_1) rapportée à un système conjugué (u) (v) et qui n'est pas nécessairement une surface (S) particulière. Réalisons la déformation [1] de (S_1) qui consiste à faire correspondre à tout point M de (S_1) le point M′ où la tangente à la courbe $u =$ const. qui passe par M touche l'arête de rebroussement de la développable circonscrite à (S_1) le long de la courbe $v =$ const. qui passe par M. Les coordonnées de M étant x, y, z, celles de M′ seront

$$X = x + \lambda \frac{\partial x}{\partial v}, \qquad Y = y + \lambda \frac{\partial y}{\partial v}, \qquad Z = z + \lambda \frac{\partial z}{\partial v},$$

où λ est une certaine fonction de u et de v; x, y, z sont

---

[1] Il s'agit bien entendu d'une correspondance entre points des deux surfaces (S_1) et (Σ_1) et non d'une déformation avec conservation de l'élément linéaire.

trois solutions d'une même équation du second ordre

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = A \frac{\partial \theta}{\partial u} + B \frac{\partial \theta}{\partial v};$$

on a donc

$$\frac{\partial X}{\partial u} = (1 + A\lambda)\frac{\partial x}{\partial u} + \left(B\lambda + \frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v},$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = \left(1 + \frac{\partial \lambda}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u} + \lambda \frac{\partial^2 x}{\partial v^2},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 X}{\partial u\, \partial v} = & \left[A(1 + A\lambda) + \frac{\partial}{\partial v}(1 + A\lambda)\right]\frac{\partial x}{\partial u} \\ & + \left[B(1 + A\lambda) + \frac{\partial}{\partial v}(B\lambda) + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\, \partial v}\right]\frac{\partial x}{\partial v} \\ & + \left(B\lambda + \frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}.\end{aligned}$$

En se reportant alors à la démonstration du théorème de Dupin sur les systèmes conjugués, on voit que le λ du point M′ est précisément égal à $-\frac{1}{A}$; $\frac{\partial X}{\partial u}$, $\frac{\partial X}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 X}{\partial u\, \partial v}$ se trouvent être des fonctions linéaires de $\frac{\partial x}{\partial v}$ et de $\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$ seulement, et il existe, par conséquent, une relation linéaire entre $\frac{\partial^2 X}{\partial u\, \partial v}$, $\frac{\partial X}{\partial u}$, $\frac{\partial X}{\partial v}$, cette relation étant vérifiée par les dérivées de Y et par celles de Z; les courbes u et v sont donc conjuguées sur la surface (Σ_0) lieu du point M′.

Cette propriété générale n'est autre que celle bien connue qui concerne les congruences de droites, leurs développables et leurs surfaces focales.

V. Les formules précédentes, dans lesquelles on ne suppose plus λ égal à $-\frac{1}{A}$, permettent d'obtenir une

équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v} - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial\lambda}{\partial v} + \lambda\frac{\partial B}{\partial v}$$
$$- \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u}(A\lambda+1) - \left(B\lambda + \frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)\frac{\partial\,\mathrm{Log}(A\lambda+1)}{\partial v} = 0,$$

qui résout la question pour une surface quelconque rapportée à un système conjugué.

Proposons-nous de déterminer les intégrales de cette équation qui sont uniquement fonction de la variable v, en supposant que A et B sont deux fonctions de v : pour une surface (S) intégrale de l'équation (E), on a, en effet,

$$a x'_0 = A a x_0 + B x'_0, \qquad \ldots, \qquad \ldots,$$

A et B étant des fonctions de v seul. En prenant $B = -v$, ce que l'on peut toujours supposer si B est distinct de zéro, on obtient précisément les équations des courbes du complexe tétraédral que forme Lie ; mais je ne ferai aucune hypothèse sur la forme des fonctions A et B de v. En prenant pour fonction λ une fonction de v seulement, on fait correspondre à la surface (S_1) une surface (Σ_1) de même nature

$$X = e^{au}(x_0 + \lambda x'_0),$$
$$Y = e^{bu}(y_0 + \lambda y'_0),$$
$$Z = e^{cu}(z_0 + \lambda z'_0);$$

cette surface (Σ_1) est la surface intégrale de (E) qui passe par la courbe imposée

$$x = x_0 + \lambda x'_0, \qquad y = y_0 + \lambda y'_0, \qquad z = z_0 + \lambda z'_0;$$

celle-ci s'obtient à partir de la courbe imposée pour (S_1), en portant un certain segment fonction de v sur les tangentes à cette courbe. La question proposée revient à chercher s'il est possible de déterminer λ par

la condition que les deux courbes imposées soient des courbes du complexe tétraédral.

On peut donc déterminer les déformations considérées de deux manières. En partant de l'équation aux dérivées partielles du second ordre, on obtient une équation différentielle entre $\frac{d\lambda}{dv}$, λ, v, dont l'intégrale générale est

$$\frac{1 + A\lambda}{B} = \text{const.}$$

On peut encore écrire que l'on a trois relations de la forme

$$aX'_0 = L a X_0 + M X'_0;$$

on obtient ainsi, après division par ax_0, une expression en a qui doit être nulle; par analogie cette même expression doit être nulle lorsqu'on remplace a par b ou c. Or, on constate que, mise sous forme entière, l'expression considérée est un trinome du second degré : l'équation du second degré devant avoir trois racines distinctes a, b, c, les coefficients doivent être nuls, ce qui donne

$$L(1 + A\lambda) = A(1 + A\lambda) + A'\lambda + A\lambda',$$

$$LB(2 + A\lambda) - M[A(1 + A\lambda) + A'\lambda + A\lambda']$$
$$= B(A'\lambda + A\lambda') - A(B - \lambda B'),$$

$$M[B(A'\lambda + A\lambda') + A(B - \lambda B')] = LB^2;$$

en éliminant L et M entre ces trois équations linéaires, on forme une équation en λ. En posant

$$\frac{A\lambda + 1}{B} = e^{\theta},$$

on met L et M sous la forme suivante :

$$L = A + \theta' + \frac{B'}{B}, \qquad M = B\frac{L}{L + A\lambda\theta'},$$

et l'équation différentielle devient

$$\theta'\left(A + \frac{B'}{B}\right) = 0.$$

Si donc $A + \frac{B'}{B}$ est distinct de zéro, θ doit être nul et l'on trouve ainsi

$$\frac{A\lambda + 1}{B} = \text{const.},$$
$$L = A + \frac{B'}{B}, \qquad M = B.$$

Examinons le cas où $A + \frac{B'}{B}$ est nul. La courbe (x_0, y_0, z_0) satisfait alors à la condition

$$\frac{x_0'}{x_0} + \frac{B'}{B} - \frac{B'}{B - \alpha} = 0;$$

on peut donc poser, α, β, γ étant des constantes arbitraires,

$$x_0 = \alpha(1 + av), \qquad y_0 = \beta(1 + bv), \qquad z_0 = \gamma(1 + cv);$$

ce cas correspond donc aux surfaces (S) développables.

Écartons ce cas et supposons qu'il s'agit d'une surface (S_1) non développable. L'équation différentielle des asymptotiques de (Σ_1) se déduira de celle des asymptotiques de (S_1) en remplaçant A par $A + \frac{B'}{B}$: cela résulte des expressions trouvées pour L et pour M. Lorsque θ varie, en restant constant, on obtient une famille à un paramètre de surfaces (Σ_1); l'équation différentielle des asymptotiques de ces surfaces ne dépend pas de θ : les asymptotiques se correspondent donc sur les surfaces (Σ_1).

Dans le cas où L se réduit à A, et dans ce cas seulement, les asymptotiques des surfaces (Σ_1) correspon-

dent aux asymptotiques de la surface (S_1) initiale ; on a alors $B' = 0$, $B = \text{const.}$, et la courbe imposée a pour équations

$$x_0 = \alpha v^{\frac{a}{a-B}}, \qquad y_0 = \beta v^{\frac{b}{b-B}}, \qquad z_0 = \gamma v^{\frac{c}{c-B}},$$

ce qui revient à prendre A égal à $\frac{1}{v}$. Par suite, on a

$$\lambda = kv,$$

$$X_0 = x_0\left(1 + \frac{ka}{a-B}\right),$$

$$Y_0 = y_0\left(1 + \frac{kb}{b-B}\right),$$

$$Z_0 = z_0\left(1 + \frac{kc}{c-B}\right);$$

la déformation considérée est donc une transformation homographique dépendant d'un paramètre arbitraire k. Les surfaces (Σ_1), qui comprennent la surface initiale (S_1), ont pour équation

$$x^{bc(b-c)(a-B)} y^{ca(c-a)(b-B)} z^{ab(a-b)(c-B)} = \text{const.},$$

et rentrent, conséquemment, dans la famille

$$x^{\lambda} y^{\mu} z^{\nu} = \text{const.}$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Avis.

Nous prions les lecteurs qui nous adressent des solutions de questions proposées de vouloir bien se conformer aux prescriptions suivantes :

1° N'écrire que sur un côté de chaque feuillet;

2° Dessiner avec soin les figures sur des feuilles à part;

3° En tête de chaque solution, indiquer le numéro de la question, puis l'année et la page du Volume où l'énoncé a paru; reproduire intégralement l'énoncé, en indiquant entre parenthèses le nom de l'auteur; enfin, faire précéder la solution proprement dite de l'indication :

SOLUTION,

par M....

2127.

(1909, p. 192.)

D'un point P *on mène quatre normales à une conique : soient* α, β, γ, δ *les centres de courbure situés sur ces quatre normales. De chacun des points* α, β, γ, δ *on peut mener deux autres normales à la conique. Démontrer que ces huit droites sont tangentes à une même conique.*

(G. CUNY.)

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

On connaît le théorème suivant : *Si parmi les* n^2 *points d'intersection de deux courbes d'ordre* n, np *se trouvent sur une courbe de degré* $p(p < n)$, *les* $n(n-p)$ *points restant seront situés sur une courbe d'ordre* $n-p$. (*Voir*, par exemple, SALMON, *Géométrie analytique*, t. II, p. 26.) En particulier si l'on considère une courbe du quatrième ordre et une droite la coupant en α, β, γ, δ, les points d'intersection de la courbe autres que α, β, γ, δ avec les tangentes à celle-ci en ces points seront sur une conique.

Corrélativement, si l'on considère une courbe de quatrième classe et un point P, si α, β, γ, δ sont les contacts des tangentes à la courbe issues de P, les tangentes à cette dernière issues de α, β, γ, δ seront tangentes à une conique.

2140.

(1909, p. 480.)

D'un point P *on mène les trois normales à une parabole. Soient* P′ *le symétrique du point* P *par rapport à l'axe de la parabole;* G *le centre de gravité du triangle ayant pour sommets les centres de courbure situés sur les trois normales;* R *le point de rembroussement de la développée. Démontrer que les trois points* R, P′, G *sont en ligne droite, et que l'on a* RP′ = P′G. (G. Cuny.)

SOLUTION

Par M. Parrod.

Soient $y^2 = 2x$ l'équation de la parabole, (x_0, y_0) les coordonnées du point P et (X, Y) celles d'un point de contact d'une normale menée de P avec la développée; y étant l'ordonnée du pied d'une normale, on a

$$y^3 + 2y(x_0 - 1) + 2y_0 = 0$$

et les coordonnées d'un point de contact XY sont :

$$X = 1 + \frac{3y^2}{2},$$
$$Y = -y^3.$$

Les coordonnées du point G sont :

$$\xi = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3) = 1 + \frac{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}{2},$$
$$\eta = \frac{1}{3}(Y_1 + Y_2 + Y_3) = -(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3);$$

donc

$$\xi = 2x_0 - 1,$$
$$\eta = -2y_0.$$

On voit ainsi la propriété énoncée.

Autres solutions par MM. Barisien, Bouvaist, Gaedecke, Pélissier.

2142.

(1909, p. 576.)

Si un cône du second ordre est circonscrit à un tétraèdre, tout plan passant par le sommet du cône coupe celui-ci et les quatre faces du tétraèdre suivant six droites tangentes à une conique. (THIÉ.)

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Soient ABCD le tétraèdre, S le sommet du cône considéré. P un plan sécant passant par S. Soient enfin α, α', β, β', γ, γ' les traces sur le plan P des arêtes AB, CD, AC, BD, AD, BC. Les cônes de sommet S circonscrits au tétraèdre forment un faisceau ponctuel et les génératrices suivant lesquelles ils sont coupés par le plan P forment un faisceau en involution F dont trois couples de rayons homologues sont $S\alpha$, $S\alpha'$, $S\beta$, $S\beta'$, $S\gamma$, $S\gamma'$, chacun d'eux correspondant aux cas de décomposition du cône en un système de deux plans. D'autre part les tangentes menées par S aux coniques inscrites dans le quadrangle $\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma'$ forment un faisceau involutif Φ qui, ayant trois couples de rayons communs avec F, se confond avec lui. La proposition à démontrer en résulte immédiatement.

Solution semblable par M. KLUG.

2143.

(1910, p. 18.)

Soient ABCD *un tétraèdre et* P *un point quelconque de l'espace. La droite* PA *rencontre la face* BCD *en* A_1 *et les droites* BA_1, CA_1, DA_1 coupent CD, DB, BC *en* L, M, N. On *joint le milieu* I *de* AA_1 *au centre* O *de la conique inscrite à* BCD *en* L, M, N. *A chacun des sommets du tétraèdre correspond une droite* IO.

Démontrer que ces quatre droites sont concourantes.

(SONDAT.)

SOLUTION

Par M. R. Bouvaist.

Il existe une quadrique Σ tangente aux faces du tétraèdre ABCD aux points A_1, B_1, C_1, D_1, où les droites PA, PB, PC, PD coupent les faces de celui-ci. Soient Γ le cône de sommet A circonscrit à Σ; L, M, N les points où les droites AB_1, AC_1, AD_1 coupent CD, BD, BC, et enfin soient α, β, γ les points où LM, MN, LN coupent respectivement BC, BD, CD.

Soit O le centre de la conique σ, section du cône Γ par BCD, la droite OA_1 est par rapport à σ le diamètre conjugué de $\alpha\beta\gamma$. Le plan $B_1C_1D_1$ détermine par ses intersections avec les faces ABC, ABD, ACD un triangle circonscrit à la conique σ', de raccordement de la quadrique Σ et du cône Γ, les droites αD_1, βB_1, γC_1, sont les tangentes à σ' en D_1, B_1, C_1, et le plan AA_1O coupe le plan $B_1C_1D_1$ suivant le diamètre conjugué de $\alpha\beta\gamma$ dans σ'; c'est par suite un plan diamétral de la quadrique Σ. Soient R et S les points d'intersection de la droite A_1O avec la conique σ; le plan AA_1O coupe Σ suivant une section centrale inscrite dans le triangle RAS et tangente à RS en A_1; or le lieu des centres des coniques inscrites dans RAS et touchant RS en A_1 n'est autre que la droite IO qui, dès lors, passe par le centre ω de Σ. Les trois autres droites analogues à IO passent de même par ω.

Autre solution par M. Klug.

2148.

(1910, p. 144.)

Pour chaque normale à l'ellipse inclinée à 45° sur les axes de l'ellipse, le centre de courbure du pied de la normale est au milieu de la corde de l'ellipse interceptée par la normale. (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. Thié.

M étant un point quelconque d'une ellipse, on sait que le cercle osculateur en M peut se construire de la façon suivante:

on mène dans l'ellipse la corde MN, que fait avec les axes les mêmes angles que la tangente en M; le cercle osculateur cherché est le cercle tangent à l'ellipse en M et passant en N.

Dans le cas où la normale en M et par suite la tangente au même point sont inclinées à 45° sur les axes, la corde MN se confond avec la normale; le cercle osculateur en M est donc le cercle de diamètre MN, ce qui établit la proposition.

Autres solutions par MM. Klug et Lez.

2146.

(1910, p. 96.)

On considère la conchoïde centrale de la podaire centrale de l'ellipse (axes $2a$ et $2b$), obtenue en augmentant ou diminuant les rayons vecteurs de la podaire de la longueur K. *Si* A *désigne l'aire de la podaire et* s *le périmètre de l'ellipse* E, *on a pour les aires de chacune des deux courbes constituant la conchoïde*

$$U_1 = A + \pi K^2 + Ks \qquad \left(A = \pi \frac{a^2 + b^2}{2}\right).$$
$$U_2 = A + \pi K^2 - Ks$$

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. Thié.

Plus généralement supposons que E soit une courbe fermée plane quelconque, et que le point O par rapport auquel on construit la podaire de E, puis une conchoïde de cette podaire, soit quelconque à l'intérieur de E. Soient, en prenant le point O pour pôle avec un axe polaire quelconque :

ρ, ω les coordonnées polaires d'un point de E;
r, θ les coordonnées polaires du point correspondant de la podaire.

On a pour expression de l'aire de la conchoïde :

$$U_1 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (r + K)^2\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\, d\theta + K\int_0^{2\pi} r\, d\theta + \pi K^2$$

$$= A + \pi K^2 + K\int_0^{2\pi} r\, d\theta.$$

Soit V l'angle que fait la tangente à E avec le rayon vecteur; on a

$$r = \rho \sin V, \qquad \theta = \omega + V - \frac{\pi}{2}.$$

On peut donc écrire

$$\int_0^{2\pi} r\, d\theta = \int_E \rho \sin V (d\omega + dV),$$

le second membre pouvant être considéré comme une intégrale curviligne prise le long de E. Mais on a, avec les notations habituelles,

$$\rho\, d\omega = \sin V\, ds,$$

d'où

$$\int_0^{2\pi} r\, d\theta = \int_E \sin^2 V\, ds + \int_E \rho \sin V\, dV.$$

Pour évaluer la dernière intégrale, intégrons par parties. Il vient

$$\int_E \rho \sin V\, dV = (-\rho \cos V)_E + \int_E \cos V\, d\rho.$$

Le premier terme du second membre est évidemment nul, et l'on a de plus

$$d\rho = \cos V\, ds;$$

on a donc finalement

$$\int_0^{2\pi} r\, d\theta = \int_E \sin^2 V\, ds + \int_E \cos^2 V\, ds = \int_E ds = s,$$

s étant le périmètre de E. En portant cette valeur dans l'ex-

pression de U_1, on obtient

$$U_1 = A + \pi k^2 + Ks,$$

ce qui est bien la valeur indiquée dans l'énoncé. On vérifierait de même la valeur de U_2.

Autre solution par M. Bouvaist.

2147.

(1910, p. 143.)

Écrire, en employant les neuf chiffres autres que zéro, trois nombres ayant respectivement deux, trois et quatre chiffres, tels que le troisième de ces nombres soit égal au produit des deux premiers.

On a, par exemple,

$$12 \times 483 = 5796.$$

Il y a d'autres solutions. On demande de les trouver toutes. (R. B.)

SOLUTION

Par M. Thié.

Soient A, B, C les sommes respectives des chiffres du premier, du second et du troisième nombre. On doit avoir, en appliquant la preuve par 9,

$$(1) \qquad AB \equiv C \pmod 9.$$

D'autre part

$$A + B + C = 45,$$

d'où

$$C \equiv -A - B \pmod 9.$$

(1) peut donc s'écrire

$$AB \equiv -A - B \pmod 9$$

ou

$$(2) \qquad (A+1)(B+1) \equiv 1 \pmod 9$$

Observons d'autre part que A est au moins égal à $1 + 2 = 3$ et au plus égal à $8 + 9 = 17$; B est au moins égal à $1 + 2 + 3 = 6$ et au plus égal à $7 + 8 + 9 = 24$. L'équation indéterminée (2) n'a donc qu'un nombre limité de solutions en A et B. On les examinera successivement pour voir si elles correspondent à des solutions du problème.

Il serait fastidieux de reproduire complètement cette analyse, qu'on abrègera en tirant parti de diverses remarques. Pour donner un exemple de la marche à suivre, examinons en partie le cas

$$A = 12, \qquad B = 15;$$

on a bien

$$(A + 1)(B + 1) = 13 \times 16 = 4 \times 7 = 28 \equiv 1 \qquad (\mathrm{mod}\, 9).$$

A est alors l'un des nombres

$$39, \quad 48, \quad 57, \quad 75, \quad 84, \quad 93.$$

Essayons $A = 39$. Le premier chiffre de B ne peut être que 1 ou 2, sinon le produit AB aurait 5 chiffres; si ce chiffre est 1, B est nécessairement l'un des nombres

$$168, \quad 186.$$

On trouve

$$39 \times 168 = 6552, \qquad 39 \times 186 = 7254.$$

La seconde multiplication donne seule une solution.

Si le premier chiffre de B est 2, B est l'un des nombres

$$258, \quad 285.$$

285 est inadmissible, car C serait encore terminé par 5; 258 ne convient pas non plus, car le produit 39×258 a 5 chiffres.

On essaiera de même les autres valeurs de A correspondant au cas examiné.

On reconnaît en définitive que la question proposée n'ad-

met que les *sept* solutions suivantes :

$$12 \times 483 = 5796, \qquad 18 \times 297 = 5346,$$
$$27 \times 198 = 5346, \qquad 28 \times 157 = 4396,$$
$$39 \times 186 = 7254, \qquad 42 \times 138 = 5796,$$
$$48 \times 159 = 7632.$$

On peut encore chercher à résoudre le problème, en supposant que les nombres de chiffres de A, B, C sont respectivement 1, 4 et 4. On trouve les deux solutions

$$4 \times 1738 = 6952,$$
$$4 \times 1963 = 7852.$$

Les neuf solutions indiquées ci-dessus ont été données aussi par M. H.-E. Dudeney, dans le numéro d'août 1910 de la revue anglaise *The Strand Magazine*.

Enfin j'ai cherché à étendre le problème au cas où l'on admet le chiffre 0 parmi ceux qui composent les nombres A, B, C. J'ai obtenu les résultats suivants :

$$4 \times 3907 = 15628,$$
$$4 \times 7039 = 28156,$$
$$27 \times 594 = 16038,$$
$$39 \times 402 = 15678,$$
$$54 \times 297 = 16038.$$

Comme l'analyse devient ici assez laborieuse, je ne puis absolument garantir que je n'ai laissé échapper aucune solution.

[K¹18g]

SUR LES COORDONNÉES PENTASPHÉRIQUES GÉNÉRALES;

PAR M. J. HAAG,
Chargé de cours à la Faculté des Sciences
de Clermont-Ferrand.

On sait qu'étant donné un système de cinq sphères deux à deux orthogonales, on peut lui faire correspondre un système de coordonnées, appelées *coordonnées pentasphériques*, dont l'introduction en Géométrie est due à M. Darboux. Mais on peut aussi définir des coordonnées pentasphériques en partant de cinq sphères quelconques (¹); et, bien qu'on puisse les déduire des coordonnées orthogonales par une simple substitution linéaire, nous croyons cependant qu'il soit intéressant et utile d'en donner une exposition directe. C'est ce que nous allons essayer de faire ici.

1. Nous commencerons par donner quelques définitions qui faciliteront, dans la suite, l'énoncé de plusieurs propositions.

Considérons la fonction

$$S \equiv k(x^2 + y^2 + z^2) + 2ax + 2by + 2cz + d$$

des coordonnées rectangulaires x, y, z. Nous disons qu'elle définit un *feuillet sphérique* (²) de coordon-

(¹) *Voir* G. DARBOUX, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces*, p. 270.

(²) Cette dénomination correspond au feuillet plan de *Grassmann* (Blatt, ou *Plangrösse*).

nées (a, b, c, d, k) [1], porté par la sphère dont l'équation est obtenue en annulant S. Le nombre k sera dit l'*indice* du feuillet. Un feuillet d'indice nul est donc porté par un plan et sera dit *feuillet plan*. Un *feuillet de l'infini* a pour coordonnées $a = b = c = k = 0$, $d \neq 0$. Il est porté par le plan de l'infini, et il équivaut, en somme, à un coefficient d, qui sera dit le *coefficient du feuillet*.

Étant donné un feuillet à distance finie, nous appellerons *point du feuillet* tout point M dont les coordonnées x, y, z annulent la fonction S correspondante.

Nous ne considérerons donc, comme points du feuillet, que des points à distance finie. Nous appellerons *vecteur normal* [2] du feuillet, relatif au point M, le vecteur (MN) dont les projections sur les axes sont

$$(1) \qquad a + kx, \qquad b + ky, \qquad c + kz.$$

Si k n'est pas nul, ce vecteur varie avec M, et si l'on appelle I le centre de la sphère qui porte le feuillet, ou *centre du feuillet*, on a l'égalité géométrique

$$(2) \qquad (\mathrm{MN}) = k(\mathrm{IM}).$$

On voit que (MN) est dirigé vers l'extérieur ou vers l'intérieur du feuillet, suivant que k est positif ou négatif. Il définit le côté positif du feuillet, ainsi qu'un sens de rotation dans le plan tangent en M [3].

Si $k = 0$, le vecteur (MN) demeure équipollent à lui-même quand M décrit le feuillet.

---

(1) Ces coordonnées sont toujours supposées finies.

(2) C'est le *Normalenstrecke* de Grassmann, dans le cas du feuillet plan.

(3) Ceci est toutefois en défaut pour un feuillet de puissance nulle car (MN) est alors dans le plan tangent, suivant la droite isotrope double de ce plan.

Dans tous les cas, des expressions (1) on déduit

$$\overline{MN}^2 = a^2 + b^2 + c^2 - kd. \tag{3}$$

Cette quantité, qui va jouer un rôle fondamental, sera appelée la *puissance du feuillet*. Un feuillet de puissance nulle et d'indice non nul sera dit *feuillet-point;* il est porté par une sphère de rayon nul. Un feuillet plan de puissance nulle et situé à distance finie sera un *feuillet isotrope;* il est porté par un plan isotrope. Bien que nous n'ayons pas défini le vecteur normal pour un feuillet de l'infini, nous conviendrons de regarder encore, dans ce cas, l'expression (3) comme représentant la puissance du feuillet, laquelle est donc nulle [1].

Supposons deux feuillets (S) et (S′) possédant au moins un point commun M à distance finie. Nous appellerons *puissance commune des deux feuillets, ou puissance de* (S) *par rapport à* (S′), [ou de (S′) par rapport à (S)], le produit scalaire des vecteurs normaux (MN), (MN′) des deux feuillets, c'est-à-dire

---

[1] On démontrera sans peine les propositions suivantes:

Si un feuillet (S) varie de façon que son centre I tende vers une position limite I_0, située à distance finie, et que son indice tende vers zéro, ou, ce qui revient au même, que son rayon augmente indéfiniment, sa limite est un feuillet de l'infini. Il en est de même si I s'éloigne indéfiniment dans une direction non isotrope, le rayon de (S) prenant d'ailleurs une suite de valeurs quelconques.

Si I s'éloigne indéfiniment dans une direction isotrope (α, β, γ), et si le rayon reste fini, le feuillet (S) a pour limite un feuillet dont les coordonnées sont:

$$a = -\lambda\alpha, \qquad b = -\lambda\beta, \qquad c = -\lambda\gamma, \qquad d, \qquad k = 0,$$

en désignant par λ la limite du rapport $\frac{\theta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$, où $(\xi, \eta, \zeta, \theta)$ sont les coordonnées homogènes du point I. Comme cette limite est indéterminée, il en est de même de celle du feuillet.

la quantité

$$p(S, S') = MN.MN'.\cos(MN, MN') \quad (^1).$$

On établit aisément la formule

$$(4) \qquad p(S, S') = aa' + bb' + cc' - \frac{kd' + k'd}{2}.$$

Dans le cas où les deux feuillets n'ont pas de point commun à distance finie, cette dernière expression servira de définition à leur puissance commune.

Il est clair que la puissance d'un feuillet par rapport à lui-même n'est autre que la puissance de ce feuillet.

Enfin, si deux feuillets ont un point commun M à distance finie, nous appellerons *angle des deux feuillets* l'angle des vecteurs normaux correspondants. Le cosinus de cet angle est entièrement déterminé et il est donné par la formule

$$(5) \quad \cos(S, S') = \frac{p(S, S')}{MN.MN'}$$
$$= \frac{aa' + bb' + cc' - \dfrac{kd' + k'd}{2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - kd}\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2 - k'd'}},$$

les radicaux devant être pris avec leurs valeurs arithmétiques, quand ils sont réels (^{2}).

On vérifiera sans peine les propriétés suivantes :

Si les feuillets (S) et (S') ont des indices non nuls, on a, en appelant I et I' les centres et R et R' les rayons des sphères qui les portent,

$$(6) \qquad \overline{II'}^2 - R^2 - R'^2 = -2\frac{p(S, S')}{kk'}.$$

(^{1}) Cette définition du produit scalaire est illusoire quand l'un des vecteurs est isotrope; il vaut mieux prendre comme expression de cette quantité la somme $XX' + YY' + ZZ'$, où X, Y, Z, et X', Y', Z' sont les composantes des deux vecteurs suivant trois axes rectangulaires.

(^{2}) Il est indéterminé pour deux feuillets de puissances et de puissance commune nulles.

Le premier membre de cette égalité a été désigné par M. Darboux sous le nom de *puissance commune des deux sphères*. Il a, comme on voit, l'inconvénient de devenir infini dès que l'un des feuillets devient plan.

Si (S) est à indice non nul et si (S′) est un feuillet plan à distance finie, le quotient $\frac{p(S, S')}{k}$ est égal au produit scalaire des vecteurs (IM′) et (M′N′), en désignant par M′ un point quelconque de (S′). En particulier, si (S′) n'est pas isotrope, on peut prendre pour M′ la projection de I sur (S′), et l'on a

$$\frac{p(S, S')}{k} = \overline{IM'}.\overline{M'N'}. \tag{7}$$

Si (S) et (S′) sont tous deux des feuillets plans à distance finie, leur puissance commune est égale au produit scalaire des vecteurs normaux (MN) et (M′N′) relatifs à deux points quelconques des feuillets.

Si (S′) est à l'infini, on a simplement

$$p(S, S') = -\frac{d'}{2}k. \tag{8}$$

2. Ces préliminaires étant exposés, choisissons cinq feuillets déterminés linéairement indépendants (c'est-à-dire dont les coordonnées de même nom ne sont pas liées par une relation linéaire et homogène), que nous appellerons les *feuillets fondamentaux*. Le feuillet S_i, par exemple, sera défini par la fonction

$$S_i \equiv k_i(x^2 + y^2 + z^2) + 2a_i x + 2b_i y + 2c_i z + d_i.$$

Il est clair que tout feuillet (S) peut être défini par la fonction

$$S \equiv \sum_{i=1}^{5} y_i S_i,$$

où y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 sont des nombres algébriques déterminés. Ces nombres seront appelés les *coordonnées pentasphériques*, ou simplement les coordonnées, du feuillet (S), que nous nommerons aussi le feuillet (y). Le feuillet (S_i) a évidemment toutes ses coordonnées nulles, sauf y_i, qui est égal à un.

Si l'on applique la formule (3), on voit que la puissance du feuillet (y) s'exprime par une forme quadratique, de discriminant non nul [1], des coordonnées y_i; nous la désignerons par la notation $\Omega(y)$. Quant à l'indice k, il devient une forme linéaire

$$F(y) = \sum_{i=1}^{5} k_i y_i$$

qui ne peut être identiquement nulle, si l'on veut que les feuillets fondamentaux soient linéairement indépendants. Les formes $\Omega(y)$ et $F(y)$ seront appelées respectivement *la forme quadratique* et *la forme linéaire fondamentales*.

D'après cela, l'équation

$$\Omega(y) = 0 \tag{9}$$

caractérise les feuillets de puissance nulle; l'équation

$$F(y) = 0 \tag{10}$$

caractérise les feuillets plans; ces deux équations simultanées caractérisent les feuillets isotropes. Un feuillet de l'infini a des coordonnées déterminées à un facteur près, qui est, par exemple, le coefficient du feuillet (n° 1); ces coordonnées doivent satisfaire à (9) et à (10).

---

[1] Si les feuillets (S_i) sont réels, cette forme quadratique est une somme de quatre carrés positifs et d'un carré négatif, en vertu de la loi d'inertie.

Si l'on se reporte à la formule (4), et si l'on se rappelle les propriétés d'invariance de la forme polaire d'une forme quadratique, on voit que *la puissance commune des deux feuillets* (y) *et* (y') *est égale à la forme polaire* $\Omega(y/y') \equiv \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5} y'_i \frac{\partial\Omega}{\partial y_i}$.

D'après la formule (5), l'angle des deux feuillets est donné par

$$\cos(y, y') = \frac{\Omega(y/y')}{\sqrt{\Omega(y)}\sqrt{\Omega(y')}}. \tag{11}$$

La condition d'orthogonalité est donc

$$\Omega(y/y') = 0.$$

On déduit de ce qui précède une interprétation très simple des coefficients de $\Omega(y)$. Si l'on pose

$$\Omega(y) \equiv \sum\sum A_{ij} y_i y_j,$$

le coefficient A_{ij} est égal à la puissance commune des feuillets fondamentaux (S_i) et (S_j).

3. Nous appellerons *coordonnées adjointes* du feuillet (y) les cinq quantités

$$x_i = \frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial y_i}.$$

Avec ces nouvelles variables, la forme quadratique $\Omega(y)$ se transforme en son adjointe $\omega(x)$, et la forme linéaire $F(y)$ devient une nouvelle forme linéaire $f(x)$. La puissance du feuillet (y), ou feuillet (x), s'écrit alors

$$p(y) = \Omega(y) = \omega(x) = \sum_{i=1}^{5} x_i y_i.$$

La puissance commune des feuillets (y) et (y') s'écrit de même

$$p(y, y') = \Omega(y/y') = \omega(x/x') = \sum_{i=1}^{5} x_i y'_i = \sum_{i=1}^{5} x'_i y_i.$$

Il y a lieu d'introduire maintenant les feuillets (s_i) dont toutes les coordonnées adjointes sont nulles, sauf x_i, qui est égal à un. Ces feuillets seront les *feuillets adjoints fondamentaux*. Le feuillet (s_i) est entièrement défini par les conditions d'être orthogonal à (S_j), pour $j \neq i$, et d'avoir l'unité pour puissance par rapport à (S_i).

Si l'on pose

$$\omega(x) \equiv \sum\sum a_{ij} x_i x_j,$$

le coefficient a_{ij} est égal à la puissance commune de (s_i) et de (s_j) [1].

Grâce à l'introduction des feuillets adjoints fondamentaux, il est facile d'avoir la signification géométrique des coordonnées d'un feuillet quelconque. Remarquons, en effet, qu'on a

$$p(S, s_i) = \sum_{i=1}^{5} x'_i y_i = y_i.$$

De même

$$p(S, S_i) = \sum_{i=1}^{5} y'_i x_i = x_i.$$

Donc, *les coordonnées y_i et x_i d'un feuillet sont respectivement égales aux puissances de ce feuillet par rapport à s_i et à S_i.*

---

[1] On sait d'ailleurs que $a_{ij} = \frac{A'_{ij}}{\Delta}$, en appelant Δ le discriminant de $\Omega(y)$ et A'_{ij} le mineur relatif à A_{ij} dans ce discriminant.

4. Considérons un feuillet-point, de centre M. Si l'on fait varier son indice, ses cinq coordonnées varient proportionnellement; nous pouvons donc les considérer comme des *coordonnées homogènes du point* M. A tout point M correspondent donc un système de coordonnées homogènes y_i, qui sont proportionnelles à ce qu'on peut appeler les puissances du point par rapport aux feuillets (s_i), et un système de coordonnées homogènes x_i, qui sont proportionnelles aux puissances de M par rapport aux feuillets (S_i).

Ces coordonnées doivent vérifier respectivement l'équation (9) et l'équation

$$\omega(x) = 0. \tag{12}$$

Si l'on applique la formule (6) aux deux points M et M', on a

$$\overline{MM'}^2 = -2\frac{\Omega(y/y')}{F(y)F(y')} = \frac{\Omega(y'-y)}{F(y)F(y')} = \frac{\omega(x'-x)}{f(x)f(x')},$$

en vertu de la formule de Taylor et des équations (9) et (12). En particulier, si les deux points sont infiniment voisins, on a l'élément linéaire de l'espace

$$ds^2 = \frac{\Omega(dy)}{[F(y)]^2} = \frac{\omega(dx)}{[f(x)]^2}.$$

Les feuillets orthogonaux en M à la droite MM' ont pour coordonnées $\lambda y_i + \mu dy_i$, λ et μ désignant deux paramètres variables. De là résulte que la condition d'orthogonalité des deux droites MM' et MM'', où M'' désigne un autre point voisin $(y + \delta y)$, est

$$\Omega(dy/\delta y) = 0,$$

ou bien

$$\omega(dx/\delta x) = 0.$$

Une surface quelconque est représentée par une

équation homogène

$$(13) \qquad G(y) = 0.$$

En particulier, la sphère qui porte le feuillet (x') a pour équation

$$\sum x'_i y_i = 0,$$

c'est-à-dire l'équation linéaire la plus générale. Les sphères tangentes en un point M de la surface (13) ont pour coordonnées adjointes

$$x'_i = \frac{\partial G}{\partial y_i} + \lambda x_i,$$

λ désignant une constante arbitraire et x_i les coordonnées adjointes de M. On aura, en particulier, le λ du plan tangent en écrivant que $f(x')$ est nul. On voit aussi que la condition d'orthogonalité de la surface (14) et d'une autre surface passant par le même point, s'écrit

$$\omega\left(\frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G'}{\partial y}\right) = 0,$$

si $G'(y) = 0$ désigne l'équation de la seconde surface.

Il est facile, enfin, d'établir les formules relatives à l'inversion. Soit un feuillet (Y) porté par la sphère d'inversion Σ (qui peut se réduire à un plan). Nous voulons les coordonnées y'_i du point M′ inverse de M (y_i). Ce point appartient au faisceau (M, Σ); il a donc des coordonnées de la forme $y_i + \lambda Y_i$; de plus, on doit avoir $\Omega(y + \lambda Y) = 0$, ou, en tenant compte de ce que $\Omega(y)$ est nul,

$$\lambda = -\frac{2\,\Omega(y/Y)}{\Omega(Y)}.$$

En particulier, si (y) est le feuillet fondamental (S_i),

les coordonnées de M′ sont

$$y'_j = y_j \quad (j \neq i), \qquad y'_i = y_i - \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial y_i}}{A_{ii}}.$$

Toutes les formules qui précèdent ont leurs analogues relativement aux coordonnées adjointes. On pourrait encore en établir beaucoup d'autres, mais nous nous en tiendrons là au point de vue des généralités, et nous allons maintenant examiner quelques systèmes particuliers.

5. Cherchons d'abord un système pour lequel les feuillets adjoints (s_i) coïncident avec les feuillets (S_i). Il faut et suffit, pour cela, que (S_i) soit orthogonal aux quatre autres feuillets fondamentaux et ait pour puissance 1 (n° 3). Nous retombons sur le système des coordonnées orthogonales, étudié en détail par M. Darboux.

Les deux formes $\Omega(y)$ et $\omega(x)$ s'écrivent alors

$$\Omega(y) = \sum_{i=1}^{5} y_i^2, \qquad \omega(x) = \sum_{i=1}^{5} x_i^2.$$

Les coordonnées adjointes d'un feuillet sont égales aux coordonnées y, et il n'y a plus lieu de les distinguer.

Le vecteur normal de (S_i) ayant pour longueur 1, son indice k_i est, en vertu de (2), égal à $\frac{1}{R_i}$, R_i désignant le rayon de la sphère correspondante, précédé du signe + ou du signe — suivant que le côté positif du feuillet est le côté extérieur ou le côté intérieur de la sphère (si l'on a un feuillet plan, $\frac{1}{R_i}$ est nul). Par suite,

les coordonnées pentasphériques d'un point M sont proportionnelles aux quotients $\frac{S_i}{R_i}$, où S_i désigne la puissance du point par rapport à la sphère (S_i), ce quotient devant être remplacé, quand le feuillet est plan, par $2l_i$, l_i désignant la distance du point M au plan, précédée du signe + ou — suivant que M est du côté positif ou négatif de (S_i). Il suffit, pour se rendre compte de tout cela, de se reporter aux formules (6) et (7).

Si nous ajoutons que la forme $F(y)$ est ici $\sum_{i=1}^{5} \frac{y_i}{R_i}$, nous en aurons dit suffisamment pour que l'on puisse déduire sans difficulté, de notre théorie générale, toutes les propriétés bien connues des coordonnées de M. Darboux.

6. Considérons maintenant le système suivant : les feuillets (S_1), (S_2), (S_3), (S_4) sont des feuillets-points, d'indices égaux à l'unité. Les points correspondants A_1, A_2, A_3, A_4 forment nécessairement un tétraèdre, et nous les supposerons tous à distance finie. Quant au feuillet (S_5), nous le supposons à l'infini, son coefficient étant -2 (n° 1). Au moyen de ces données et d'une remarque faite à la fin du n° 2, nous pouvons écrire immédiatement $\Omega(y)$. Si α_{ij} désigne le carré de la distance $A_i A_j$, nous avons, en vertu de la formule (6),

$$A_{ij} = -\frac{\alpha_{ij}}{2} \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4);$$

puis, en vertu de (8),

$$A_{i5} = 1 \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \qquad\qquad A_{55} = 0.$$

Le discriminant s'écrit

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\alpha_{12}}{2} & -\frac{\alpha_{13}}{2} & -\frac{\alpha_{14}}{2} & 1 \\ -\frac{\alpha_{21}}{2} & 0 & -\frac{\alpha_{23}}{2} & -\frac{\alpha_{24}}{2} & 1 \\ -\frac{\alpha_{31}}{2} & -\frac{\alpha_{32}}{2} & 0 & -\frac{\alpha_{34}}{2} & 1 \\ -\frac{\alpha_{41}}{2} & -\frac{\alpha_{42}}{2} & -\frac{\alpha_{43}}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\Delta'}{8},$$

en posant

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 1 & \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 1 & \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & \alpha_{34} \\ 1 & \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 0 \end{vmatrix}.$$

Cherchons les feuillets adjoints. Le feuillet (s_1) doit être orthogonal à (S_2), (S_3), (S_4), (S_5); il est donc porté par le plan A_2, A_3, A_4, que nous appellerons (Π_1). De plus, sa puissance par rapport à (S_1) doit être égale à 1 (n° 3). Donc, en vertu de la formule (7), son vecteur normal doit être dirigé vers l'extérieur du tétraèdre, et il doit avoir pour longueur $\frac{1}{h_1}$, en appelant h_1 la hauteur issue de A_1. On définit de même (s_2), (s_3), (s_4). Quant à (s_5), il est porté par la sphère circonscrite, que nous appellerons (Σ). Sa puissance par rapport à (S_5) devant être égale à 1, son indice est aussi égal à 1, d'après (8).

Nous aurons immédiatement des formules intéressantes en calculant les coefficients de $\omega(x)$. Tout

d'abord, le coefficient a_{11} est égal à $\frac{1}{h_1^2}$; on a donc

$$\frac{4\Delta}{h_1^2} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 1 & \alpha_{32} & 0 & \alpha_{34} \\ 1 & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 0 \end{vmatrix}$$
$$= -(\alpha_{43}^2 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{32}^2 - 2\alpha_{24}\alpha_{23} - 2\alpha_{32}\alpha_{34} - 2\alpha_{42}\alpha_{43}),$$

ou encore

$$h_1^2 = \frac{-\Delta'}{2\alpha'_{11}},$$

en désignant par α'_{ij} le mineur de Δ' relatif à α_{ij}. On aura les trois autres hauteurs par des formules analogues.

Si nous désignons maintenant par φ_{ij} l'angle dièdre formé par les faces opposées à A_i et à A_j, nous avons par exemple (n° 1)

$$a_{12} = -\frac{\cos\varphi_{12}}{h_1 h_2} = -\frac{2\alpha'_{12}}{\Delta'};$$

d'où

$$\cos\varphi_{12} = \frac{2h_1 h_2 \alpha'_{12}}{\Delta'} = \frac{\alpha'_{12}}{\sqrt{\alpha'_{11}\alpha'_{22}}};$$

puis,

$$\sin^2\varphi_{12} = \frac{\alpha'_{11}\alpha'_{22} - (\alpha'_{12})^2}{\alpha'_{11}\alpha'_{22}} = \frac{\Delta'}{\alpha'_{11}\alpha'_{22}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha_{34} \\ 1 & \alpha_{43} & 0 \end{vmatrix} = \frac{2\alpha_{34}\Delta'}{\alpha'_{11}\alpha'_{22}},$$

d'après un théorème de Jacobi sur les déterminants [1]. Si l'on remarque que l'aire σ_1 de la face $A_2 A_3 A_4$ est égale à $\frac{1}{2}\sqrt{\alpha_{34}}\,\frac{h_2}{\sin\varphi_{12}}$, on en déduit aisément la formule

$$\sigma_1 = \frac{1}{4}\sqrt{-\alpha'_{11}},$$

---

[1] *Voir*, par exemple, *Encyclopédie des Sciences mathématiques* (édition française, t. I_2, n° 23).

d'où résulte la suivante

$$\Delta' = 8 \times 36 V^2,$$

en appelant V le volume du tétraèdre.

L'indice de (s_5) étant égal à un, le vecteur normal en M est équipollent au rayon (IM) (n° 1). Soit donc R le rayon de (Σ). On a $R^2 = a_{55}$; d'où

$$R^2 = -\frac{\beta_0}{2\Delta'},$$

en appelant β_i le mineur de Δ' relatif à l'élément de la première ligne et de la $(i+1)^{\text{ième}}$ colonne. De même, si ψ_1 désigne l'angle de (Σ) avec le plan (Π_1), on a $a_{15} = \frac{R}{h_1}\cos\psi_1$; d'où

$$\cos\psi_1 = \frac{\beta_1}{\sqrt{\beta_0 \alpha'_{11}}},$$

d'où

$$\sin\psi_1 = \sqrt{\frac{2\Delta' \alpha_{23}\alpha_{34}\alpha_{42}}{\beta_0 \alpha'_{11}}}.$$

Par suite, le rayon R_1 du cercle $A_2 A_3 A_4$ est donné par

$$R_1 = R\sin\psi_1 = \frac{\sqrt{\alpha_{23}\alpha_{34}\alpha_{42}}}{\sqrt{-\alpha'_{11}}} = \frac{\sqrt{\alpha_{23}\alpha_{34}\alpha_{42}}}{4\sigma_1},$$

ce qui donne une formule élémentaire bien connue.

Introduisons maintenant un feuillet-point (M) d'indice 1. Si l'on appelle α_{i5} le carré de la distance $A_i M$, les coordonnées adjointes du feuillet considéré sont $-\frac{\alpha_{15}}{2}$, $-\frac{\alpha_{25}}{2}$, $-\frac{\alpha_{35}}{2}$, $-\frac{\alpha_{45}}{2}$, 1. Si l'on porte ces valeurs dans (12), on obtient la formule connue

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} \\ 1 & \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25} \\ 1 & \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & \alpha_{34} & \alpha_{35} \\ 1 & \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 0 & \alpha_{45} \\ 1 & \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Quant aux coordonnées y_i, les quatre premières sont les *coordonnées barycentriques du point* M; par exemple, $y_1 = \frac{v_1}{V}$, v_1 désignant le volume $MA_2A_3A_4$, compté positivement ou négativement suivant que M et A_1 sont du même côté de (H_1) ou de côtés différents. La cinquième coordonnée y_5 est la puissance du point M par rapport à la sphère (Σ). En tenant compte de (9), on voit que cette puissance est donnée en fonction des coordonnées barycentriques par la formule

$$y_5 = \frac{1}{4}\Sigma\alpha_{ij}y_iy_j \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4).$$

On en déduit, en particulier, l'équation de (Σ) en coordonnées barycentriques.

Il serait facile de multiplier les applications du système particulier que nous venons d'étudier. On pourrait, par exemple, interpréter les coordonnées d'un feuillet plan ou d'un feuillet sphérique quelconque. C'est ce que nous laisserons au lecteur le soin de faire [1].

7. Nous indiquerons rapidement, pour terminer, un dernier système.

Prenons pour (S_5) un feuillet quelconque de puissance égale à 1, porté par une sphère véritable (Σ). Soit $ABA'B'$ un quadrilatère isotrope tracé sur cette sphère. Appelons α et β les distances AB et A'B'. Prenons pour (S_1) et (S_2) les feuillets-points de centres respectifs A et A' et d'indices respectifs $\frac{2}{\alpha}$ et $-\frac{2}{\alpha}$. Prenons de même pour (S_3) et (S_4) les feuillets-points de centres B et B' et d'indices $\frac{2}{\beta}$ et $-\frac{2}{\beta}$.

---

[1] Les diverses formules que nous venons d'établir sont d'ailleurs à peu près toutes connues.

Nous avons alors

$$\Omega(y) = y_5^2 + 2y_1y_2 + 2y_3y_4;$$

d'où

$$\omega(x) = x_5^2 + 2x_1x_2 + 2x_3x_4.$$

Les feuillets adjoints (s_1), (s_2), (s_3), (s_4), (s_5) coïncident respectivement avec (S_2), (S_1), (S_4), (S_3), (S_5).

Ce système se prête, d'une façon particulièrement simple, à l'étude de la cyclide de Dupin qui admet les points A, A′, B, B′ pour points doubles. Deux sphères (σ) et (σ') passant respectivement par les points A, A′ et B, B′ ont des coordonnées de la forme

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = \eta_3, \quad y_4 = \eta_4, \quad y_5 = \eta_5$$

et

$$y_1 = \eta'_1, \quad y_2 = \eta'_2, \quad y_3 = 0, \quad y_4 = 0, \quad y_5 = \eta'_5.$$

Pour qu'elles soient tangentes, il faut et suffit que l'on ait, en vertu de l'équation (12),

$$\eta_5^2 \eta_5'^2 = (\eta_5^2 + 2\eta_3\eta_4)(\eta_5'^2 + 2\eta'_1\eta'_2).$$

Par suite, si (σ') reste fixe, les coordonnées de (σ) doivent vérifier une relation de la forme

$$\eta_5^2 = 2m\eta_3\eta_4,$$

m désignant une certaine constante. La sphère (σ) ayant pour équation en coordonnées adjointes

$$\eta_3 x_3 + \eta_4 x_4 + \eta_5 x_5 = 0,$$

son enveloppe a pour équation

$$x_5^2 = \frac{2}{m} x_3 x_4. \tag{14}$$

Telle est l'équation de la cyclide de Dupin dans le

système actuel. Elle s'écrit aussi, en vertu de (12),

$$x_5^2 = \frac{2}{n} x_1 x_2, \tag{15}$$

avec la condition

$$m + n + 1 = 0. \tag{16}$$

Sous cette seconde forme, elle apparaît comme l'enveloppe des sphères (σ'), dont les coordonnées sont liées par

$$\eta_5'^2 = 2n\eta_3'\eta_4'.$$

L'angle φ, sous lequel (σ) coupe (Σ), est donné par

$$\cos^2\varphi = \frac{\eta_5^2}{\eta_5^2 + 2\eta_3\eta_4} = \frac{1}{1 + \frac{1}{m}};$$

il est donc constant, et l'on a

$$m = \cot^2\varphi.$$

De même, les sphères (σ') coupent (Σ) sous un angle constant ψ, et cet angle est lié au premier par la relation (16), qui s'écrit [1]

$$\cos\varphi\cos\psi = 1.$$

Nous terminerons cette étude rapide en remarquant que les équations (14) et (15) donnent le théorème suivant :

Étant donnés une sphère (Σ) *et deux points* A *et* A′ *de cette sphère, le lieu des points* M, *dont la puissance par rapport à* (Σ) *est proportionnelle au produit* MA . MA′ *est une cyclide de Dupin admet-*

---

[1] On trouvera toutes ces propriétés dans une Note placée à la fin de la seconde édition des *Systèmes triples orthogonaux* de M. Darboux.

tant pour points doubles A *et* A′, *ainsi que les deux points de contact* B *et* B′ *des plans tangents à* (Σ) *menés par* AA′. *La puissance de* M *par rapport à* (Σ) *est aussi proportionnelle au produit* MB. MB′, *lequel est donc proportionnel à* MA. MA′.

Si la sphère (Σ) *est un plan, on a un énoncé analogue, dans lequel la puissance par rapport à* (Σ) *doit être remplacée par la distance à ce plan. La cyclide possède alors trois plans de symétrie.*

[O¹8c]

SUR UNE APPLICATION DE LA THÉORIE DU TRIÈDRE MOBILE;

Par M. J. HAAG, à Clermont-Ferrand.

Soit une courbe gauche (C), sur laquelle on a fixé un système d'abscisses curvilignes. Soit Mxyz le trièdre principal relatif au point M d'abscisse curviligne s. Si l'on considère un point P d'abscisse curviligne $s+h$, les coordonnées x, y, z de ce point par rapport au trièdre précédent peuvent être développées en séries entières en h, pourvu que M ne soit pas un point singulier de (C) et que h soit assez petit. On sait qu'en appelant ρ et τ les rayons de courbure et de torsion relatifs au point M, les coefficients de ces séries s'expriment tous en fonction de ρ, τ et de leurs dérivées successives par rapport à s. Il existe différentes manières de calculer ces coefficients. En voici une qui n'est peut-être pas nouvelle, mais qui semble, en tout cas, assez peu connue.

Les développements cherchés peuvent s'écrire

$$(1)\qquad \begin{cases} x = a_1 h + \dfrac{a_2}{2} h^2 + \ldots + \dfrac{a_n}{n!} h^n + \ldots, \\ y = b_1 h + \dfrac{b_2}{2} h^2 + \ldots + \dfrac{b_n}{n!} h^n + \ldots, \\ z = c_1 h + \dfrac{c_2}{2} h^2 + \ldots + \dfrac{c_n}{n!} h^n + \ldots. \end{cases}$$

Imaginons un mouvement du point M sur (C) tel que s soit le temps. Il est facile de voir que a_n, b_n, c_n sont les projections sur Mx, My, Mz de l'accélération $(n-1)^{\text{ième}}$ du point M. Or, étant donnés, d'une façon générale, un trièdre mobile Oxyz et un point Q mobile par rapport à ce trièdre, il est facile de calculer, de proche en proche, les accélérations absolues successives de Q. Supposons, en effet, que l'on connaisse les projections $\gamma_{n,x}$, $\gamma_{n,y}$, $\gamma_{n,z}$ de l'accélération $n^{\text{ième}}$ sur Ox, Oy, Oz. Menons par un point fixe O_1 un vecteur $(O_1\Gamma_n)$ équipollent à cette accélération et un trièdre O_1xyz parallèle à Oxyz. L'accélération $(n+1)^{\text{ième}}$ est le vecteur vitesse du point Γ_n; on a donc les formules de récurrence

$$\gamma_{n+1,x} = \frac{d(\gamma_{n,x})}{dt} + q\gamma_{n,z} - r\gamma_{n,y}, \qquad \ldots.$$

Comme on a

$$\gamma_{0,x} = \frac{dx}{dt} + \xi + qz - ry, \qquad \ldots,$$

on voit qu'on pourra calculer $\gamma_{n,x}$, $\gamma_{n,y}$, $\gamma_{n,z}$, quel que soit n.

Appliquons ceci au trièdre Mxyz, le point Q étant en M. On aura les formules de récurrence

$$(2)\qquad \begin{cases} a_{n+1} = a'_n - rb_n, \\ b_{n+1} = b'_n + ra_n - pc_n, \\ c_{n+1} = c'_n + pb_n, \end{cases}$$

en appelant a'_n, b'_n, c'_n les dérivées de a_n, b_n, c_n par rapport à s. On a, en outre,

$$a_1 = 1, \qquad b_1 = 0, \qquad c_1 = 0, \qquad p = -\frac{1}{\tau}, \qquad r = \frac{1}{\rho}.$$

On possède donc tous les éléments nécessaires pour calculer, de proche en proche, tous les coefficients, a_n, b_n, c_n.

Indiquons les valeurs qui correspondent à $n = 1, 2, 3, 4$. On a immédiatement

$$a_1 = 1, \qquad b_1 = 0, \qquad c_1 = 0,$$

$$a_2 = 0, \qquad b_2 = \frac{1}{\rho}, \qquad c_2 = 0,$$

$$a_3 = -\frac{1}{\rho^2}, \qquad b_3 = -\frac{\rho'}{\rho^2}, \qquad c_3 = -\frac{1}{\rho\tau},$$

$$a_4 = \frac{3\rho'}{\rho^3}, \qquad b_4 = -\frac{\rho''}{\rho^2} + \frac{2\rho'^2}{\rho^3} - \frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{\rho\tau^2}, \qquad c_4 = \frac{2\rho'}{\rho^2\tau} + \frac{\tau'}{\rho\tau^2}.$$

Comme application, on peut vérifier, par exemple, que le centre I de la sphère osculatrice a pour coordonnées $(0, \rho, -\tau\rho')$ et coïncide avec le point où la droite polaire touche son enveloppe. En substituant les développements (1) dans l'expression

$$f \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2\rho y + 2\tau\rho' z$$

et annulant le coefficient de h^4, on obtient la *condition pour que la sphère osculatrice ait, avec la courbe, un contact du quatrième ordre;* on trouve sans difficulté

$$\tau^2\rho'' + \tau\tau'\rho' + \rho = 0.$$

Or, on vérifie facilement que *cette équation exprime aussi que le point* I *a une vitesse nulle*. Donc, *si une courbe a un contact du quatrième ordre avec chacune de ses sphères osculatrices, elle est sphérique.*

[17a]

SUR UNE QUESTION PROPOSÉE PAR M. FONTENÉ;

PAR M. E. CAHEN.

De la propriété énoncée par M. Fontené (4e série, t. IX, p. 384) et résolue par M. Bricard (4e série, t. X, p. 475), on peut déduire deux conséquences intéressantes. Je suppose $b = 1$ de sorte que le théorème prend la forme suivante : *p étant un nombre premier et a un entier non $\equiv 1 \pmod{p}$, le nombre*

$$a^{p-1} + a^{p-2} + \ldots + a + 1$$

a tous ses diviseurs premiers et, par suite, tous ses diviseurs $\equiv 1 \pmod{p}$.

I. *Le polynome $x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$ est irréductible.*

Car soit

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1 = f(x)\, g(x),$$

f et g étant deux polynomes entiers à coefficients entiers. Donnons à x toutes les valeurs incongrues $(\bmod p)$ possibles, sauf la valeur 1, soient 0, 2, 3, ..., $p - 1$. Pour chacune de ces $p - 1$ valeurs $f(x)$, qui est un diviseur de $x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$, prend une valeur $\equiv 1 \pmod{p}$. Donc la congruence

$$f(x) \equiv 1 \pmod{p}$$

a $p - 1$ racines incongrues. Donc ou bien elle est identique, ou bien son degré ne peut être inférieur à $p - 1$. Or, si elle est identique, comme son premier

coefficient est manifestement égal à 1, c'est que $f(x)$ se réduit à 1. Si elle est de degré $p-1$, c'est $g(x)$ qui se réduit à 1. Donc..., etc.

II. *Il y a une infinité de nombres premiers* $\equiv 1 \pmod{p}$.

Ce n'est qu'un cas particulier du théorème de Dirichlet, mais la démonstration suivante est intéressante par sa simplicité.

D'abord il existe au moins un tel nombre, car il suffit de donner à x une valeur non congrue à $1 \pmod{p}$, par exemple 2, et de calculer un facteur premier du nombre obtenu $2^p - 1$, pour en avoir un.

Soient alors $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ des nombres premiers $\equiv 1 \pmod{p}$, je vais en calculer un autre. Il suffit pour cela de former le nombre

$$(\alpha\beta\ldots\lambda)^{p-1} - (\alpha\beta\ldots\lambda)^{p-2} + \ldots - \alpha\beta\ldots\lambda + 1.$$

C'est la valeur que prend $x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$, lorsque $x = -\alpha\beta\ldots\lambda$. Or cette valeur de x est $\equiv -1 \pmod{p}$. Donc tout facteur premier de ce nombre est

$$\equiv 1 \pmod{p}$$

et d'ailleurs ce ne peut être ni α, ni β, ..., ni λ. Donc..., etc.

Le théorème en question se généralise en remplaçant p par un nombre non premier n et

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$$

par le polynome qui donne les racines primitives de x^{n-1}. Cette démonstration du théorème de Dirichlet ou des démonstrations du même genre sont connues depuis longtemps. *Voir*, par exemple, *Encyclopédie des Sciences mathématiques* (édition française, t. I_3,

p. 285) et E. Landau, *Handbuch der Lehre der Verteilung der Primzahlen*, t. I, p. 436 et suiv.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1910).

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES [1].

Solution par M. TURRIÈRE.

Étant données deux quadriques P et Q, considérons une droite D dont les conjuguées D′ et D″ par rapport aux deux quadriques sont complanes : une telle droite D est l'intersection des plans polaires d'un même point par rapport aux deux quadriques, c'est-à-dire de deux plans qui se correspondent homographiquement : *les droites* D *constituent donc un complexe de Reye.* Lorsque le point de l'espace est sommet du tétraèdre conjugué commun des deux quadriques, ces plans sont confondus ; par suite, toute droite de l'une quelconque des quatre faces du tétraèdre appartient au complexe, qui, dès lors, est *un complexe tétraédral attaché au tétraèdre conjugué commun des deux quadriques.*

Dans le cas actuel de deux paraboloïdes ayant même axe Oz et même sommet O, les plans polaires de tout point M de l'axe sont confondus suivant un plan qui

---

[1] *Voir* l'énoncé page 402 des *Nouvelles Annales* de 1910.

est normal à l'axe au point symétrique de M par rapport au point O. Toute droite orthogonale à l'axe appartient donc au complexe. On voit de même que toute droite rencontrant l'axe appartient au complexe. *Le complexe tétraédral dégénère donc en deux complexes linéaires spéciaux attachés respectivement à l'axe* Oz *et à la droite à l'infini des plans perpendiculaires à* Oz.

C'est ce cas de dégénérescence du complexe tétraédral qui faisait l'objet du problème proposé, problème dont je vais donner une solution analytique.

J'établirai tout d'abord une proposition fondamentale. Étant donné un paraboloïde équilatère Π, rapporté à des axes rectangulaires,

$$x^2 - y^2 - 2az = 0,$$

et une droite D de coordonnées plückériennes p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, les trois premières étant les coordonnées de direction, les coordonnées plückériennes de la droite Δ, conjuguée de D par rapport au paraboloïde Π, sont :

$$\varpi_1 = p_2, \qquad \varpi_2 = p_1, \qquad \varpi_3 = \frac{p_6}{a},$$

$$\varpi_4 = p_5, \qquad \varpi_5 = p_4, \qquad \varpi_6 = ap_3.$$

Faisons tourner, autour de Oz et d'un angle α, le paraboloïde Π, en laissant fixe la droite D; l'équation du paraboloïde P ainsi obtenu s'établit en remplaçant respectivement x, y, z par

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha, \quad -x\sin\alpha + y\cos\alpha, \quad z;$$

d'où l'équation du paraboloïde P :

$$(x^2 - y^2)\cos 2\alpha + 2xy\sin 2\alpha - 2az = 0:$$

les coordonnées plückériennes de la droite conjuguée D′ de D par rapport à ce paraboloïde P, sont :

$$p'_1 = -p_1 \sin 2\alpha + p_2 \cos 2\alpha = \varpi_1 \cos(-2\alpha) + \varpi_2 \sin(-2\alpha),$$
$$p'_2 = p_1 \cos 2\alpha + p_2 \sin 2\alpha = -\varpi_1 \sin(-2\alpha) + \varpi_2 \cos(-2\alpha),$$
$$p'_3 = \frac{p_6}{a} = \varpi_3,$$
$$p'_4 = -p_4 \sin 2\alpha + p_5 \cos 2\alpha = \varpi_4 \cos(-2\alpha) + \varpi_5 \sin(-2\alpha),$$
$$p'_5 = p_4 \cos 2\alpha + p_5 \sin 2\alpha = -\varpi_4 \sin(-2\alpha) + \varpi_5 \cos(-2\alpha),$$
$$p'_6 = ap_3 = \varpi_6.$$

De ces expressions il résulte que, *lorsque le paraboloïde* Π *tourne d'un angle* α *autour de son axe* Oz, *la conjuguée d'une droite fixe* D *tourne de l'angle double.*

De cette remarque découlent immédiatement les deux premières parties du problème proposé. Deux paraboloïdes hyperboliques équilatères égaux, P et Q, ayant même axe Oz et même sommet O, peuvent être considérés comme dérivant du paraboloïde Π d'équation

$$x^2 - y^2 - 2az = 0,$$

par rotations respectives α et $-\alpha$ autour de l'axe Oz; dans ces conditions, les droites conjuguées D′ et D″ d'une droite D s'obtiennent par rotations 2α et -2α de la conjuguée Δ par rapport au paraboloïde Π.

I. Pour que D′ et D″ soient complanes, il faut donc que Δ rencontre Oz ou bien lui soit orthogonale, et, par suite, que D soit orthogonale à Oz ou complane avec Oz.

La vérification analytique ne présente aucune difficulté; les coordonnées plückériennes de D′ et D″ sont,

d'après ce qui précède :

$$p'_1 = -p_1 \sin 2\alpha + p_2 \cos 2\alpha, \qquad p''_1 = p_1 \sin 2\alpha + p_2 \cos 2\alpha,$$
$$p'_2 = p_1 \cos 2\alpha + p_2 \sin 2\alpha, \qquad p''_2 = p_1 \cos 2\alpha - p_2 \sin 2\alpha,$$
$$p'_3 = \frac{p_6}{a}, \qquad p''_3 = \frac{p_6}{a},$$
$$p'_4 = -p_4 \sin 2\alpha + p_5 \cos 2\alpha, \qquad p''_4 = p_4 \sin 2\alpha + p_5 \cos 2\alpha,$$
$$p'_5 = p_4 \cos 2\alpha + p_5 \sin 2\alpha, \qquad p''_5 = p_4 \cos 2\alpha - p_5 \sin 2\alpha,$$
$$p'_6 = ap_3; \qquad p''_6 = ap_3;$$

l'expression

$$p'_1 p''_4 + p'_2 p''_5 + p'_3 p''_6 + p''_1 p'_4 + p''_2 p'_5 + p''_3 p'_6$$

se réduit à

$$4 p_3 p_6 \sin^2 2\alpha;$$

pour que D′ et D″ soient complanes, il faut donc : ou bien que p_3 soit nul (complexe des droites orthogonales à Oz), ou bien que p_6 soit nul (complexe des droites rencontrant Oz).

Puisque D′ et D″ s'obtiennent par rotations -2α et 2α d'une même droite Δ autour de Oz, ces droites D′ et D″ sont à la même distance de Oz et font avec Oz le même angle ; leurs projections sur un plan perpendiculaire à cet axe font l'angle 4α indépendant de la droite D.

II. Je désignerai par $p_1^k, p_3^k, \ldots, p_6^k$ les coordonnées plückériennes de la droite D_k. J'ai précédemment trouvé :

$$p_1^2 = -p_1^1 \sin 2\alpha + p_2^1 \cos 2\alpha, \qquad p_4^2 = -p_4^1 \sin 2\alpha + p_5^1 \cos 2\alpha,$$
$$p_2^2 = p_1^1 \cos 2\alpha + p_2^1 \sin 2\alpha, \qquad p_5^2 = p_4^1 \cos 2\alpha + p_5^1 \sin 2\alpha,$$
$$p_3^2 = \frac{p_6^1}{a}, \qquad p_6^2 = ap_3^1;$$

on en déduit

$$p_1^2 + ip_2^2 = (p_2^1 + ip_1^1)e^{2i\alpha},$$

et une formule analogue pour p_4 et p_5.

Pour passer de la droite D_2 à la droite D_3 il suffit, dans les formules précédentes, de changer p_k^1 en p_k^2, p_k^2 en p_k^3 et α en $-\alpha$. On obtient ainsi

$$p_1^3 + ip_2^3 = (p_1^1 + ip_2^1)e^{-4i\alpha},$$

et une formule analogue pour p_4 et p_5; on a ensuite

$$p_3^3 = p_3^1, \qquad p_6^3 = p_6^1.$$

Ces formules expriment que la droite D_3 s'obtient en faisant tourner D_1 d'un angle 4α dans un sens déterminé. D_5 s'obtient par rotation de D_3 de 4α dans le même sens, et ainsi de suite. *Les droites* D_1, D_3, D_5, ..., D_{2p+1}, ... *sont donc génératrices d'un même hyperboloïde de révolution autour de* Oz *et elles se déduisent les unes des autres par une rotation déterminée.*

Pour obtenir la distribution de D_2, D_4, D_6, ..., D_{2p}, il suffit de remplacer D_1, D_3, D_5, ... par D_2, D_4, D_6, ..., et α par $-\alpha$. *Les droites* D_{2p} *sont ainsi génératrices d'un second hyperboloïde de révolution autour de* Oz *et elles se déduisent les unes des autres par une rotation déterminée, égale à la précédente mais en sens inverse.*

Une particularité intéressante se présente lorsque α est commensurable avec Π : dans ce cas, en effet, il y a un nombre fini de droites D_{2p+1} et un même nombre de droites D_{2p}. Pour chacun des hyperboloïdes, les traces des droites D_k sur tout parallèle sont les sommets d'un polygone régulier, convexe ou étoilé.

Il en est ainsi pour une droite quelconque de l'espace, choisie pour droite initiale D_1. Mais si l'on suppose que D_1 est une droite D satisfaisant à la première partie du problème, les deux hyperboloïdes de révolution dégénèrent l'un en un cône de révolution, l'autre en un

plan qui rencontre orthogonalement Oz au point symétrique, par rapport à O, du sommet du cône. L'une des séries de droites est constituée de génératrices du cône; l'autre série est constituée de tangentes à un cercle d'axe Oz.

III. Pour que la question à traiter ait un sens, il faut dès maintenant exclure les droites D orthogonales à l'axe Oz et ne considérer que celles qui rencontrent cet axe.

Soit M le point de rencontre de D′, D″ et soient

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z$$

les coordonnées de ce point. La droite D est l'intersection des plans polaires de M par rapport aux paraboloïdes, ou encore des plans d'équations

$$(Xx - Yy)\cos 2\alpha - a(Z + z) = 0,$$
$$Xy + Yx = 0;$$

nous prendrons pour coefficients directeurs de la droite D

$$p_1 = \cos\theta, \qquad p_2 = -\sin\theta, \qquad p_3 = \frac{r}{a}\cos 2\alpha;$$

le point M_1, où D rencontre Oz, a pour cote z_1,

$$z_1 = -z.$$

Soit φ l'angle de Oz et de D. On a, au signe près,

$$\cot\varphi = \pm\frac{r}{a}\cos 2\alpha;$$

de la condition imposée à D *de faire un angle constant avec* Oz *il résulte donc que* M *reste sur un cylindre de révolution d'axe* Oz *et de rayon*

$$r = a\left|\frac{\cot\varphi}{\cos 2\alpha}\right|.$$

Considérons les surfaces (S′), (S″) engendrées respectivement par D′ et D″, lorsqu'on impose la condition supplémentaire que ces surfaces font un angle constant en tout point de rencontre des deux droites D′ et D″. On a :

$$\begin{aligned} p'_1 &= -\sin(\theta + 2\alpha), & p''_1 &= -\sin(\theta - 2\alpha), \\ p''_2 &= \cos(\theta + 2\alpha), & p''_2 &= \cos(\theta - 2\alpha), \\ p'_3 &= 0, & p''_3 &= 0; \end{aligned}$$

définissant alors le plan tangent à (S′), au point M, par la droite D′ et par la tangente à la courbe lieu de M, on obtient, pour coefficients directeurs de la normale à (S′) en M, les expressions suivantes :

$$\cos(\theta + 2\alpha)\frac{dz}{d\theta}, \quad \sin(\theta + 2\alpha)\frac{dz}{d\theta}, \quad -r\sin 2\alpha;$$

et, par conséquent, les coefficients directeurs de la normale à (S″) au même point M sont :

$$\cos(\theta - 2\alpha)\frac{dz}{d\theta}, \quad \sin(\theta - 2\alpha)\frac{dz}{d\theta}, \quad +r\sin 2\alpha.$$

L'angle des deux surfaces au point M est donc défini par la relation

$$\cos V = \frac{\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 \cos 4\alpha - r^2 \sin^2 2\alpha}{\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 + r^2 \sin^2 2\alpha};$$

V étant supposé constant, $\frac{dz}{d\theta}$ sera constant et par suite, z et θ seront liés par une relation linéaire.

Le lieu de M *est donc une hélice circulaire.*

Le lieu de D *est un hélicoïde*, engendré par le déplacement hélicoïdal d'une droite rencontrant l'axe Oz.

Cherchons la condition demandée, moyennant laquelle l'hélice sera une courbe tracée sur cet héli-

coïde. Les équations de l'hélice sont de la forme

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = k\theta + z_0;$$

quant à celles de l'hélicoïde lieu de D, elles sont de la forme

$$x = \rho\sin\varphi\cos\psi, \qquad y = \rho\sin\varphi\sin\psi,$$
$$z = \rho\cos\varphi + k\psi - z_0.$$

les deux paramètres variables étant ρ et ψ: la droite D rencontre, en effet, l'axe Oz au point M, de cote

$$z_1 = -z = -k\theta - z_0,$$

et ses coefficients directeurs sont

$$p_1 = \cos\theta, \qquad p_2 = -\sin\theta, \qquad p_3 = \cot\varphi.$$

On obtient ainsi une relation (N étant un nombre entier quelconque)

$$2z_0 \pm a\frac{\cot^2\varphi}{\cos 2\alpha} = k\pi \times N,$$

entre z_0, φ, α et k.

Les surfaces lieux de D′ et D″ sont deux surfaces qui se déduisent par rotations 2α et -2α de la surface lieu de Δ. Celle-ci est la polaire réciproque de l'hélicoïde engendré par D par rapport au paraboloïde H. Cette surface engendrée par (Δ) est une surface à plan directeur, dont le paramètre de distribution $\frac{dz}{d\theta}$ est constant; elle est engendrée par le mouvement hélicoïdal de Δ, qui reste tangente à un cylindre de révolution autour de Oz. On reconnaît là un hélicoïde de M. Painlevé particulier; cette surface a été étudiée par M. A. Buhl, dans des Mémoires écrits spécialement pour les candidats à l'Agrégation et publiés dans les *Nouvelles Annales* [1]: M. Buhl a consacré le para-

---

[1] A. Buhl, *Sur les surfaces dont les lignes asymptotiques se*

graphe 6 de son second Mémoire à la surface considérée et montré que ces asymptotiques sont situées sur des hyperboloïdes de révolution.

Les lignes de courbure de cette surface sont déterminables sans quadrature. En se reportant, en effet, à la page 212 des *Nouvelles Annales* de 1910, il résulte de ce que le contour apparent sur Oxy est un cercle et de ce que le paramètre de distribution est constant, que l'on peut poser, a et b étant des constantes,

$$\Psi_1 = a, \qquad \Psi_2 = b\psi,$$
$$\varpi = a\cos\varphi + b\psi\sin\varphi;$$

d'où l'on déduit [p. 197, formules (6)]

$$D = 0, \qquad D' = \frac{b}{\cos\varphi}, \qquad D'' = a\cos\varphi;$$

et, par suite, l'équation des images sphériques des lignes de courbure (p. 21) est

$$2\psi = \frac{a}{b}\varphi \pm \int\sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{4}{\cos^2\varphi}}\,d\varphi;$$

pour intégrer, il suffit de prendre $\operatorname{tang}\varphi$ comme variable.

---

déterminent par quadratures (octobre 1908, août 1909, septembre 1910).

BIBLIOGRAPHIE.

Leçons sur les séries de polynomes a une variable complexe; par *Paul Montel*. — 1 volume in-8 de VI-128 pages de la *Collection de monographies sur la théorie des fonctions*. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

Le Livre de M. Paul Montel appartient à cette belle *Collection de monographies sur la théorie des fonctions* qui, fondée par M. Émile Borel en 1898, n'a pas cessé de s'enrichir presque chaque année de quelque nouveau Volume. On sait quelle heureuse influence a exercée cette Collection sur les études mathématiques; mais il ne faudrait pas, à mon avis, attribuer uniquement son succès à l'importance prise de nos jours par la théorie des fonctions : des livres rédigés suivant la même conception pédagogique et relatifs à d'autres branches des Mathématiques auraient sans doute le même succès. Et il ne sera pas inutile de dire quelle est cette conception pédagogique à propos du Livre de M. Montel qui la réalise au plus haut degré.

Les Livres de la *Collection Borel* ne supposent chez le lecteur que les premières notions de l'Analyse; dans chaque Livre, les premiers Chapitres mettent le lecteur au courant des notions classiques dont il a besoin pour comprendre les Chapitres suivants; ceux-ci contiennent, sous forme didactique, l'exposé de travaux plus récents, parus dans divers Mémoires, et en même temps les recherches personnelles de l'auteur. Le Livre ainsi conçu tient à la fois du Traité et du Mémoire original : sa lecture est d'une utilité capitale pour l'étudiant qui veut apprendre à travailler sur les Mémoires originaux et pour tout lecteur qui veut s'initier rapidement aux résultats fondamentaux d'une théorie, sans avoir le temps de faire un choix dans la multitude d'écrits relatifs à cette théorie.

Le Livre de M. Paul Montel remplit parfaitement le but que je viens d'indiquer, en ce qui concerne l'étude des séries

de polynomes à une variable complexe. Ce Livre devait être primitivement écrit par M. Émile Borel, qui annonçait sa publication ultérieure dans la préface de ses *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes;* mais, après les travaux fort importants de M. Montel parus depuis lors, il a semblé à M. Borel que nul n'était mieux qualifié que M. Montel lui-même pour traiter le sujet annoncé.

Dans le Chapitre premier, l'auteur, après avoir rappelé les notions fondamentales sur les ensembles de points dans le plan, les fonctions analytiques et leurs points singuliers, la représentation conforme, étudie les séries de fonctions analytiques, puis les familles de fonctions holomorphes *bornées en module* dans un domaine; au sujet de ces dernières familles, M. Montel établit cette proposition fondamentale, qu'il a donnée le premier dans sa thèse et dont il a montré toute l'importance : *on peut former avec les fonctions d'une pareille famille une suite infinie convergeant uniformément dans le domaine.* Le Chapitre se termine par quelques définitions relatives aux séries de polynomes et par les théorèmes de M. Hadamard et de M. Hurwitz relatifs, le premier à la multiplication, le second à l'addition des singularités de deux fonctions analytiques.

Le Chapitre II est consacré à diverses méthodes de développement d'une fonction holomorphe en série de polynomes dans un domaine D. L'auteur démontre le théorème donné par M. Painlevé pour le cas où le domaine D est limité par un contour convexe, puis il expose la méthode de M. Hilbert relative à un domaine D limité par une courbe simple quelconque : cette méthode est rattachée aux polynomes d'interpolation de Lagrange; vient ensuite la méthode de M. Runge pour le développement d'une fonction analytique uniforme en une série de fractions rationnelles convergente dans la région d'existence de cette fonction, méthode que l'auteur rapproche de celle donnée par M. Appell pour les domaines D limités par des arcs de cercle; la fin du Chapitre est consacrée à l'étude fort intéressante des polynomes d'approximation de Tchebicheff.

Le Chapitre III nous donne de nouvelles méthodes de développement d'une fonction holomorphe en séries de polynomes. Une des plus intéressantes, celle de M. Faber, occupe la plus

grande partie du Chapitre. M. Faber démontre que toute fonction holomorphe dans un domaine D limité par un contour simple est la somme d'une série $\Sigma a_n P_n(x)$, où les polynomes $P_n(x)$ ne dépendent que du domaine, tandis que les constantes a_n ne dépendent que de la fonction; si le domaine est l'intérieur d'un cercle de centre a, on prend $P_n(x)$ égal à $(x-a)^n$ et l'on retrouve la série de Taylor; on retrouve de même, en faisant varier le domaine, divers autres développements connus, par exemple ceux dans lesquels les P_n sont les polynomes de Legendre.

Le Chapitre IV est relatif aux séries de polynomes convergentes dans plusieurs domaines extérieurs les uns aux autres; des exemples classiques montrent qu'une pareille série peut représenter, dans ces divers domaines D_1, D_2, ..., des fonctions analytiques différentes f_1, f_2, ..., M. Montel montre, pour le cas d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable de domaines D, que les fonctions f_1, f_2, ..., aussi bien que les domaines D_1, D_2, ..., peuvent être complètement arbitraires. L'auteur s'occupe ensuite du développement en série de polynomes d'une fonction analytique uniforme ayant des points singuliers; cette étude le conduit à montrer, avec M. Runge, que la région d'existence d'une pareille fonction n'est assujettie qu'à la seule restriction d'être d'un seul tenant et de ne contenir aucun point frontière.

Dans le Chapitre V, l'auteur considère *a priori* une série de polynomes convergente dans un domaine, ou, ce qui revient au même, une suite convergente de polynomes, et il se propose d'étudier la nature de la fonction limite. En particulier, dans quel cas cette somme est-elle analytique? M. Montel montre, par des exemples, que, parmi les diverses conditions qui ont été données, aucune n'est à la fois nécessaire et suffisante. Une notion importante, due à M. Montel, est celle de points de convergence *réguliers* ou *irréguliers*; un point de convergence P est dit régulier si, dans un cercle de centre P et de rayon suffisamment petit, la convergence est uniforme. M. Montel étudie l'ensemble des points irréguliers et il donne diverses propriétés remarquables des suites de polynomes dans le voisinage de leurs points de convergence irréguliers.

L'Ouvrage de M. Montel est d'une lecture fort intéressante, non seulement à cause de l'attrait présenté par le sujet lui-

même, mais encore à cause de la façon simple, pédagogique dont nous sont présentés les résultats des divers travaux originaux que l'auteur nous fait connaître en même temps que ses travaux personnels.

S. Lattès.

Les fonctions polyédriques et modulaires; par *G. Vivanti*, Professeur à la Faculté des Sciences de Pavie. (Ouvrage traduit par *A. Cahen.*) — 1 vol. in-8 de 320 pages. (Prix : 12 fr.). Paris, Gauthier-Villars, éditeur; 1910.

Faire passer à travers le bloc compact des œuvres des grands mathématiciens de langue allemande le clair et pur rayon du génie latin, tel est le but de M. Vivanti, et comme il a traité jadis Sophus Lie, il traite maintenant Félix Klein.

L'organisation des Universités italiennes a favorisé sa tâche : là, à côté des enseignements traditionnels et de fondation, il y a place pour les disciplines nouvelles, alors que chez nous la fatale fragmentation de la licence en certificats et la loi du moindre effort qui guide nos étudiants dans le libre choix des certificats s'opposent à tout progrès, si même elles ne conduisent à l'incohérence des études.

Dans une série de 34 leçons en 1901-1902 à Messine, *Sulla teoria della resoluzione della equazioni di quinta grado*, M. Vivanti a présenté la substance des *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade* de Klein (Leipzig, 1884); de ce cours, l'ossature si nette, si élégante, a été signalée aux lecteurs des *Nouvelles Annales* en janvier 1905. Une série analogue, en 1902-1903, *Sulla teoria delle funzioni modulari*, a fait connaître l'essentiel des *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen*, de Klein et Fricke (Leipzig, 1890-1892).

Les Leçons de M. Vivanti, recueillies par les étudiants et autographiées, ont servi de base à un livre plus réduit, plus condensé, où, pour éviter des redites et pour mieux montrer la filiation des théories, l'auteur étudie d'une part les groupes polyédriques et le groupe modulaire, puis d'autre part les

fonctions et équations polyédriques et modulaires : ces *Elementi della Teoria delle funzioni poliedriche e modulari* (Milan, 1906). M. Armand Cahen, Professeur au Lycée d'Évreux, a eu la bonne idée de les traduire, il l'a fait avec précision et souplesse, et M. Gauthier-Villars, qui, en fait, a en France le monopole des belles éditions mathématiques, en a volontiers entrepris la publication. Envers tous deux, quiconque s'intéresse en France aux hautes Mathématiques sera très redevable.

Après avoir étudié *in abstracto* les propriétes des groupes d'opérations, M. Vivanti en fait l'application aux substitutions linéaires, dont il se propose notamment de déterminer tous les groupes finis possibles. Une interprétation géométrique simple permet de passer des groupes de substitutions linéaires aux groupes de rotations d'une sphère sur elle-même : de ces groupes, ceux qui sont finis se rattachent étroitement aux polyèdres réguliers que certaines rotations superposent à eux-mêmes (de là le nom de groupes polyédriques). Après les avoir soigneusement étudiés aux points de vue analytique et géométrique, l'auteur en déduit la représentation des groupes finis sur le plan. Les réseaux de triangles curvilignes qu'on est ainsi conduit à considérer possèdent un certain nombre de propriétés : les réseaux qui n'en possèdent que quelques-unes sont aussi envisagés en vue de leur utilisation ultérieure, notamment dans l'étude de l'unique groupe infini dont il est question ici, le groupe modulaire. Ce groupe est considéré, non à partir de sa définition arithmétique, mais à partir de son *champ fondamental* : ses propriétés et celles de ses sous-groupes sont l'objet d'un examen détaillé. Il me semble que, pour terminer cette Partie, l'auteur ou le traducteur aurait pu ajouter un Chapitre sur les groupes fuchsiens et kleinéens de M. Poincaré, quitte à se borner à un aperçu analogue à celui que donne M. Forsyth dans sa *Theory of Functions* : c'eût été une invitation à pénétrer dans un domaine découvert par notre illustre compatriote et resté peu exploré.

A la notion de groupe se rattache celle d'invariant. L'étude des invariants liés aux groupes précédents constitue la seconde Partie du Livre. Les formes invariantes fondamentales des groupes finis une fois construites, M. Vivanti aborde les fonctions polyédriques ou fonctions rationnelles d'une variable, que n'altère aucune des substitutions d'un groupe polyédrique.

Toute telle fonction est complètement déterminée quand on connaît les valeurs qu'elle prend en trois points du plan. Cette propriété, sans équivalent dans le cas de plus d'une variable et qui est l'origine de la simplicité des applications, a son analogue pour le groupe modulaire. La théorie des fonctions elliptiques fournit la construction de la fonction modulaire principale J, de laquelle l'auteur passe aux fonctions modulaires invariantes dans un sous-groupe du groupe modulaire.

Viennent alors les applications. Les équations polyédriques ou modulaires sont celles qui définissent les valeurs de la variable pour lesquelles une fonction polyédrique ou modulaire prend une valeur donnée (l'expression *équation modulaire* est employée ici, on le voit, dans un sens tout différent que dans la théorie de la transformation des fonctions elliptiques) : leur résolution s'effectue par une méthode uniforme, basée sur la considération de l'équation différentielle de Schwartz, laquelle se rattache à l'équation hypergéométrique de Gauss. Les mêmes équations sont ensuite étudiées au point de vue algébrique et en considérant les résolvantes de Galois. Le Livre s'achève par l'examen des rapports des équations polyédriques avec la résolution algébrique des équations de degré trois, quatre ou cinq. Nous avons regretté de ne pas voir traiter le beau problème de l'intégration algébrique des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients rationnels. Enfin, à notre avis, un Chapitre sur les fonctions thêta-fuchsiennes, sur leurs singularités, sur la construction des fonctions automorphes en général, sur leur lien avec l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients algébriques et avec la représentation paramétrique des courbes algébriques, eût ouvert de larges horizons au lecteur : l'Ouvrage fût devenu plus suggestif et, si l'auteur était trop à l'étroit dans la collection Hœpli, il aurait dû profiter de l'édition française pour réaliser ce qu'il avoue dans sa Préface avoir désiré.

A. Boulanger,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

CORRESPONDANCE.

M. **E.-N. Barisien** : *Sur six hyperboles remarquables d'un triangle.* — Voici d'assez curieuses propriétés du triangle, qui se démontrent facilement par la géométrie analytique, et que nous nous contentons d'énoncer, pensant qu'elles sont inédites.

On considère un triangle ABC, *son cercle circonscrit de centre* O *et les milieux* A', B', C' *de* OA, OB, OC.

I. *Soient :* H_A *l'hyperbole équilatère de centre* A', *passant par* A *et ayant ses axes parallèles aux bissectrices de l'angle* A ; H_B *et* H_C *les hyperboles analogues à* H_A.

Ces trois hyperboles H_A, H_B, H_C *ont quatre points communs dont l'un est le point* O *et les trois autres* M, P, Q *sont situés sur le cercle circonscrit à* ABC *et forment un triangle équilatéral.*

Les droites MO, PO, QO *sont respectivement parallèles aux droites de Simson du triangle* ABC *relatives aux points* M, P, Q.

II. *Soient :* H'_A *l'hyperbole équilatère de centre* A', *passant par* A *et ayant ses asymptotes parallèles aux bissectrices de l'angle* A ; H'_B *et* H'_C *les hyperboles analogues à* H'_A.

Ces trois hyperboles H'_A, H'_B, H'_C *ont quatre points communs dont l'un est le point* O *et les trois autres* M', P', Q' *sont situés sur le cercle circonscrit à* ABC *et forment un triangle équilatéral.*

Les droites M'O, P'O, Q'O *sont respectivement perpendiculaires aux droites de Simson du triangle* ABC *relatives aux points* M', P', Q'.

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Besançon.

Épreuve théorique. — *Première question* (Cours). — *Énoncé du principe de d'Alembert. Montrer que, si le degré de liberté d'un système holonôme est strictement égal à p, le principe de d'Alembert fournira les équations du mouvement de ce système sous la forme d'un système efficace de p équations différentielles du second ordre.*

Deuxième question (Problème de Cinématique). — *Le déplacement de glissement d'une figure plane solide étant supposé tel que deux points de la figure aient leurs trajectoires rectilignes, on demande :*

1° *De préciser les deux courbes de roulement relatives à ce déplacement et d'en déduire la représentation complète du déplacement considéré;*

2° *De déterminer la trajectoire d'un point quelconque de la figure;*

3° *D'indiquer tous les points de la figure dont la trajectoire est rectiligne ou circulaire.*

Troisième question (Problème de Dynamique). — *Une barre pesante appuie sans frottement, par ses deux extrémités, sur deux glissières fixes situées dans un même plan :*

1° *Déterminer et distinguer ses positions d'équilibre stable ou instable;*

2° *Calculer la période des petits mouvements de la barre autour d'une position d'équilibre stable.*

Épreuve pratique. — *Première question. — Une horloge et une montre marchent d'accord et marquent le temps solaire moyen; on les copie l'une et l'autre en les reconstruisant respectivement semblables de matières et de formes aux modèles primitifs mais en amplifiant* K *fois les dimensions linéaires homologues :*

Que vaudront (en temps solaire moyen) la durée

indiquée par la nouvelle horloge, la durée indiquée par la nouvelle montre?

Deuxième question. — Une sphère homogène fixe et de rayon R *exerce autour d'elle une attraction newtonienne; elle produit en un point de sa surface une accélération g connue. Un point matériel venant de très loin sans vitesse initiale va pénétrer par un puits très étroit jusqu'au centre de la sphère; avec quelle vitesse y parviendra-t-il?*

Application numérique :

$g = 9,81$ *mètres-seconde par seconde,*

$R = 6366$ *kilomètres.*

(Novembre 1909.)

Bordeaux.

Épreuve théorique. — *Une tige matérielle* AB *peut librement tourner dans un plan horizontal autour d'un de ses points* A *qui est fixe.*

Une tige CD *sans masse peut librement tourner autour d'un de ses points* C *qui est fixé sur la même verticale que* A. *Cette tige porte une masse pesante* P *qui est fixée sur elle, mais peut être déplacée; elle est, en outre, assujettie à rencontrer constamment la tige* AB.

Toutes ces liaisons ont lieu sans frottement.

On demande d'étudier les divers mouvements du système suivant la position de la masse P *sur la tige* CD *et en supposant que le mouvement initial du système soit une simple rotation autour de la verticale* AC.

Épreuve pratique. — S, S' *étant les centres des deux bases d'un cylindre de révolution de rayon* R *et de hauteur* H, *déterminer un parallèle* C *de ce cylindre de telle façon que l'ellipsoïde central d'inertie du solide homogène limité par les deux cônes ayant* S, S' *pour sommets et* C *pour base commune soit une sphère.*

(Novembre 1909.)

Grenoble.

Problème. — *Deux sommets consécutifs* A, B *d'une plaque carrée homogène pesante glissent sans frottement*

sur une circonférence fixe, située dans un plan horizontal, de diamètre égal à la diagonale du carré.

Former et intégrer autant que possible les équations du mouvement de la plaque.

Chercher si les données initiales peuvent être choisies de façon que le mouvement soit une rotation uniforme autour de l'axe de la circonférence.

Paramètres : ψ *angle que fait le côté* AB *du carré avec un rayon fixe* Ox_1 *de la circonférence,* θ *angle d'une demi-droite* Gz *normale à la plaque avec la verticale descendante* Oz_1.

Épreuve pratique. — *Une roue de rayon* R *reste dans un plan fixe et roule sur une droite fixe* O_1x_1, *sans glisser. Une tige homogène* OA *de masse* M *est fixée à la roue par ses extrémités, placées l'une au centre* O *de la roue, l'autre* A *sur la circonférence. On admet que les réactions qui peuvent s'exercer en* A *sont normales à* OA.

Soient θ *l'angle que fait* OA *avec* O_1x_1, Ox *le prolongement de* OA, Oy *un axe perpendiculaire à* Ox.

Supposant connue la variation de θ *en fonction du temps, on demande :*

1° *Les projections sur* Ox *et* Oy *de la vitesse et de l'accélération d'un point* P *de* OA, *on pose* $x = OP$;

2° *Les projections des réactions qui s'exercent en* O *et en* A *sur la base.*

3° *Application numérique. Calculer la valeur maximum de la réaction s'exerçant en* A *sachant que la barre pèse* 35^{kg}, *que le mouvement de* O *est uniformément retardé, sa vitesse passant en* 2 *minutes de* 72^{km} *à l'heure à zéro.*

4° *On immobilise brusquement la roue à un instant où* $\theta = \alpha$ *et* $\frac{d\theta}{dt} = \omega$. *Quelles sont les percussions de réaction s'exerçant en* O *et en* A? (Novembre 1909.)

Lille.

Épreuve théorique. — I. *Un corps solide mobile autour d'un point fixe subit successivement deux rotations finies; l'une de ces rotations se fait autour d'un axe* OA *et a une amplitude* α. *l'autre se fait autour d'un axe* OB *et a une*

amplitude β. *Composer ces deux rotations et trouver la grandeur de l'angle de la rotation résultante :* 1° *en supposant les axes fixes dans l'espace;* 2° *en les supposant fixes dans le corps.*

II. *Établir les formules de Cayley qui donnent les composantes de la rotation instantanée d'un trièdre trirectangle mobile autour de son sommet, en fonction des paramètres d'Olinde Rodrigues fixant la position de ce trièdre par rapport à un trièdre fixe, et des dérivées de ces paramètres en fonction du temps. (Les formules d'O. Rodrigues sont supposées établies.)*

III. *Appliquer les équations de Lagrange à l'étude du mouvement d'un corps solide pesant, homogène, de révolution, fixé par un point de son axe et animé d'une rotation propre très grande autour de cet axe de figure qu'on abandonne sans vitesse. Calculer le rapport de la période de la nutation à la durée de révolution du corps autour de son axe.*

Épreuve pratique. — *Un cylindre droit à base elliptique, d'axes* $c = 1^{\text{dm}}$, $b = 2^{\text{dm}}$, *de hauteur* $h = 1^{\text{dm}}$, *est terminé par un demi-ellipsoïde admettant comme section principale une base du cylindre et comme troisième demi-axe* $a = 3^{\text{dm}}$. *Le système homogène et pesant, de densité* 1, *peut osciller librement autour du petit axe de la base libre, axe placé horizontalement. On écarte l'axe de figure de l'ensemble de* 60° *par rapport à la verticale descendante et on l'abandonne à lui-même. Quelle sera la durée d'une oscillation complète?* (Novembre 1909.)

Marseille.

Composition écrite. — *Dans un plan vertical on donne deux barres fixes, l'une* Ox *horizontale, l'autre* Oy *verticale.*

Une barre pesante et homogène, de longueur $2x$, *est placée verticalement et repose par son extrémité* A *sur la barre* Ox. *Elle est en équilibre instable. L'équilibre étant troublé, la barre tombe et vient heurter* Oy *par sa seconde*

extrémité B. *Elle fait à ce moment un angle de* 30° *avec l'horizontale.*

Trouver, immédiatement avant et après le choc, la vitesse du centre de gravité de la barre et la vitesse angulaire de la barre.

Les corps sont mous et il n'y a pas de frottement.

SOLUTION.

Soient R et S les pressions en A et B au commencement du choc, u et v les composantes de la vitesse du centre de gravité G, $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ la vitesse angulaire de la barre.

On met l'indice o au début du choc et l'indice 1 à la fin. Soit

$$\int_{t_0}^{t_1} R\,dt = A, \qquad \int_{t_0}^{t_1} = B,$$

A et B sont les percussions en A et B évaluées en quantités de mouvement.

Avant le choc, les forces sont verticales, le centre de gravité décrit une verticale et l'on a $y = a\sin\theta$.

Le théorème des forces vives donne

$$Ma^2\left(\cos^2\theta + \frac{1}{3}\right)\omega^2 = 2Mga(1 - \sin\theta).$$

Donc, au début du choc, pour $\theta = 30°$, on a

$$\frac{13}{12}\omega_0^2 = ga, \qquad \omega_0 = -2\sqrt{\frac{3}{13}}\sqrt{ga} \qquad (\text{car } \omega_0 \text{ est négatif}),$$

$$u_0 = 0, \qquad v_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}a\omega_0.$$

Si l'on applique, pendant la durée du choc, le théorème du centre de gravité et le théorème des moments, on a

$$M(u_1 - u_0) = B, \qquad M(v_1 - v_0) = A,$$

$$M\frac{a^2}{3}(\omega_1 - \omega_0) = \frac{1}{2}Ba - \frac{\sqrt{3}}{2}Aa;$$

d'où

$$\frac{2a}{3}(\omega_1 - \omega_0) = u_1 - u_0 - \sqrt{3}(v_1 - v_0).$$

A la fin du choc, la composante horizontale de la vitesse du point B est nulle de même que la composante verticale de la vitesse du point A. On a donc

$$u_1 + \frac{1}{2} a \omega_1 = 0, \qquad v_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} a \omega_1 = 0.$$

On a donc

$$\frac{2}{3}(\omega_1 - \omega_0) = -\frac{1}{2}\omega_1 - \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0\right),$$

d'où

$$\omega_1 = \frac{13}{16}\omega_0.$$

On connaît donc ω_0, u_0, v_0, ω_1, u_1, v_1.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Le câble d'un pont suspendu a* 100^m *de portée et* 8^m *de flèche. Il supporte un poids de* 1000^{kg} *par mètre courant.*

Trouver la longueur du câble et calculer sa section.

On fait travailler le fer à 20^{kg} *par millimètre carré.*

Quel serait l'accroissement de la flèche pour un accroissement de 10^{cm} *de longueur du câble?*

(Novembre 1909.)

QUESTIONS.

2169. — Si la courbe (M) est le lieu des points M d'où l'on peut mener à deux courbes données (A) et (B) des tangentes MA et MB égales entre elles, et si α et β sont les centres de courbure répondant respectivement aux points A et B :

1° La tangente en M à la courbe (M) est perpendiculaire à la droite $\alpha\beta$;

2° Le point où la droite AB touche son enveloppe est à sa rencontre avec la droite $\alpha\beta$.

(M. D'OCAGNE.)

2170. On donne une courbe plane (C) et un point fixe O

dans son plan. On porte sur la tangente en un point M de (C) une longueur MP égale au rayon vecteur OM. Déterminer la tangente en P à la courbe lieu de ce point.

A. Duby.

2171. Étant donnés dans un plan un point et deux droites parallèles, on considère une sphère variable ayant pour diamètre le segment intercepté par les deux parallèles sur une droite tournant autour du point. Montrer que l'enveloppe de cette sphère est un ellipsoïde de révolution aplati ou bien un hyperboloïde de révolution à une nappe, suivant la position du point fixe par rapport aux deux parallèles.

Klug.

2172. Dans le triangle ABC on mène les droites AD, BE, CF, qui se coupent en un point P. Soit Q la conique circonscrite à ABC et tangente en A, B, C aux parallèles à EF, FD, DE.

I. Les parallèles à PA, PB, PC, menées par un point O de Q, coupent BC, CA, AB en λ, μ, ν, et l'on a la droite $\Delta(\lambda, \mu, \nu)$.

II. En permutant les points O et P, on a une seconde droite $\Delta'(\lambda', \mu', \nu')$.

III. Les droites Δ et Δ' se coupent au milieu ω de OP.

Cas où P est l'orthocentre de ABC. P. Sondat.

2173. On donne un point P dans le plan d'un triangle ABC.

I. Trouver un second point P_1, à distance finie, tel qu'en menant par P_1 les parallèles à PA, PB, PC, coupant BC, CA, AB en (λ, μ_1, ν_2), (λ_2, μ, ν_1), (λ_1, μ_2, ν), on ait les trois droites $\Delta(\lambda, \mu, \nu)$, $\Delta_1(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, $\Delta_2(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$.

II. Quand P est à l'infini, P_1 est un point *quelconque* du plan autre que P.

III. Si P est le centre de gravité G de MBC, P_1 est un point *quelconque* de l'ellipse Q circonscrite et de centre G.

IV. Si Δ', Δ_1, Δ'_2 sont les droites relatives au point P'_1, diamétral à P_1, les quatre droites Δ_1, Δ_2, Δ'_1, Δ'_2 se coupent sur Q et le triangle $(\Delta, \Delta', P_1, P'_1)$ est inscrit dans l'ellipse g tangente aux milieux des côtés de ABC.

V. Quand P est sur Q, P_1 est en G, et le triangle $(\Delta\Delta_1\Delta_2)$ est inscrit dans Q, circonscrit à g et *équivalent* à ABC.

VI. Si P n'est ni à l'infini ni sur Q, les points P et P_1 sont *réversibles*. P. Sondat.

2174. Si un point O décrit le cercle ABC, on sait que les parallèles à OA, OB, OC, menées par l'orthocentre P du triangle ABC, coupent BC, CA, AB en trois points en ligne droite (¹).

Démontrer que cette droite Δ enveloppe la conique Q inscrite à ABC et concentrique au cercle d'Euler.

Si Δ_1 est la droite correspondant au point O_1, diamétralement opposé à O, le point $O'(\Delta\Delta_1)$ décrit la directrice $\Delta'(\lambda', \mu', \nu')$ de Q, relative à son foyer P, et qu'on obtient en menant les parallèles $P\lambda'$, $P\mu'$, $P\nu'$, aux tangentes en A, B, C.

La corde H_1 des contacts tourne autour de P en restant perpendiculaire à PO'. P. Sondat.

2175. Soient A', B', C' trois points pris sur les côtés d'un triangle ABC, de telle manière que les droites AA', BB', CC' soient concourantes; soient α, β, γ trois points pris sur les côtés du triangle A'B'C' de telle manière que les droites $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ soient concourantes. Démontrer que les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sont concourantes. Giraudon.

2176. On considère une parabole P et une droite D perpendiculaire à l'axe de P. Soient : A, B, C, les pieds des normales à P abaissées d'un point quelconque M de D; A_1, B_1, C_1 les points de Frégier, et A_2, B_2, C_2 les centres de courbure relatifs à A, B, C. On a, entre les aires des trois

(¹) *Voir* les *Nouvelles Annales*, 1907, p. 332.

triangles ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, les relations

$$ABC = A_1B_1C_1, \qquad \frac{ABC}{A_2B_2C_2} = \text{const.}$$

E.-N. Barisien.

2177. On donne deux cercles concentriques C et C′ et un point A. Une droite quelconque passant par A rencontre C′ en P et Q. Le lieu des sommets du quadrilatère formé par les quatre tangentes à C issues de P et Q se compose d'une conique et de deux droites. E.-N. Barisien.

2178. On donne une ellipse E et un point P sur le grand axe, et l'on considère une corde variable PAB. Le lieu des centres de similitude des cercles décrits sur PA et PB comme diamètres se compose du grand axe et d'une droite perpendiculaire au grand axe. E.-N. Barisien.

2179. Soient une ellipse E, d'axes $2a$ et $2b$, et ses deux cercles de Chasles C et C′, concentriques à E et de rayons $(a+b)$ et $(a-b)$. Il existe une infinité de triangles MPQ qui sont inscrits à C et circonscrits à E, en M′, P′, Q′.

Montrer que :

1° Les normales à E en M′, P′, Q′ sont concourantes et que le lieu de leur point de concours est le cercle de Chasles C′;

2° Le lieu de l'orthocentre du triangle MPQ est le même cercle C′;

3° Les droites MM′, PP′, QQ′ sont normales à une même ellipse fixe;

4° Les droites PQ et P′Q′ ont leur point de concours sur une *kreuzcurve*. E.-N. Barisien.

2180. Démontrer la formule

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\omega \cos 3\omega \sqrt{\cos 2\omega}\, d\omega = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$

E.-N. Barisien.

[D1d]

SUR LES POLYNOMES

$$U_{m,n} = \frac{1}{2^{m+n}\, m!\, n!} \frac{\partial^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n}}{\partial x^m\, \partial y^n};$$

PAR M. WILLIGENS.

Dans les *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences de 1865, sous le titre : *Sur quelques développements en série de fonctions de plusieurs variables*, Hermite donne une forme particulière à la série de Lagrange étendue au cas de plusieurs variables. Entre autres, Hermite applique son développement à l'expression

$$[1 - 2ax - 2by + a^2(1-y^2) + 2abxy + b^2(1-x^2)]^{-\frac{1}{2}},$$

et il trouve comme terme général de son développement

$$\frac{a^m b^n}{2^{m+n}\, m!\, n!} \frac{\partial^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n}}{\partial x^m\, \partial y^n},$$

et il désigne par la notation $U_{m,n}$ le coefficient de $a^m b^n$. Hermite montre dans son Mémoire que ces expressions présentent des propriétés analogues à celles des polynomes de Legendre.

Dans un article publié dans *Grunerts Archiv für Mathematik und Physik* (1), M. Appell propose d'étudier les courbes représentées par $U_{m,n} = 0$ au point de vue du nombre maximum de points d'intersection réels que ces courbes peuvent avoir avec une droite.

(1) APPELL, *Grunerts Archiv.*, 3e série, t. II, 1902, p. 20.

Ce sujet fut abordé par M. W. Tramm dans sa dissertation inaugurale [1].

Le travail qui suit a pour but d'étendre les résultats d'Hermite et de Tramm.

Théorème. — *Si l'un des indices m ou n de* $U_{m,n} = 0$ *est nul, la courbe représentée par cette équation se compose d'un certain nombre d'ellipses. Ces ellipses admettent les axes de coordonnées pour axes de symétrie : le demi grand axe a pour mesure l'unité; le demi petit axe, une des racines positives ou nulles du polynome de Legendre correspondant à l'indice non nul.*

Soit $n = 0$, $(x^2 + y^2 - 1)^m$ est homogène en x et en $1 - y^2$. Il en sera de même pour $\frac{\partial^m (x^2 + y^2 - 1)^m}{\partial x^m}$. Si m est impair on pourra mettre x en facteur et l'on aura comme second facteur un polynome homogène en x^2 et $1 - y^2$. Si m est pair l'expression est homogène en x^2 et $1 - y^2$. Des polynomes de cette forme peuvent se décomposer en facteurs linéaires de la forme

$$x^2 - p^2(1 - y^2).$$

Posons

$$x = p\sqrt{1 - y^2},$$

p étant considéré comme variable et y comme constante.

$$\frac{\partial^m (x^2 + y^2 - 1)^m}{\partial x^m} = (1 - y^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m (p^2 - 1)^m}{dp^m};$$

---

[1] Tramm, *Geometrische Diskussion des Hermite'schen Polynoms :*

$$U_{m,n} = \frac{1}{2^{m+n} m! n!} \frac{\partial^{m+n} (x^2 + y^2 - 1)^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n},$$

Zurich, Buchdruckerei Gebr. Leemann und C°, 1908.

en égalant à zéro on obtient

$$\frac{d^m(p^2-1)^m}{dp^m}=0.$$

Si m est impair, l'une des racines est $p=0$; on obtient une ellipse aplatie confondue avec Oy, que l'on peut considérer comme correspondant au facteur x de

$$\frac{\partial^m(x^2+y^2-1)^m}{\partial x^m}=0.$$

En égalant l'un des facteurs à zéro, on a

$$\frac{x^2}{p^2}+y^2-1=0 \qquad (p<1),$$

ce qui démontre la proposition.

Remarque. — Les remarques qui précèdent ne s'appliquent pas seulement au cas où l'indice de dérivation est égal à l'exposant. En effet $(x^2+y^2-1)^{m+n}$ est homogène en x et $1-y^2$. Si nous dérivons k fois par rapport à x, il en sera de même dans l'expression obtenue, et tous les termes auront même parité, pour l'exposant de x. On pourra, si cet exposant est impair, mettre x en facteur. Le polynome se décomposera alors en facteurs de la forme

$$x^2-p^2(1-y^2).$$

En posant $x=p\sqrt{1-y^2}$, il vient

$$\frac{\partial^k(x^2+y^2-1)^{m+n}}{\partial x^k}=\frac{(1-y^2)^{m+n}}{(1-y^2)^{\frac{k}{2}}}\,\frac{d^k(p^2-1)^{m+n}}{dp^k}=0;$$

si $m+n-1>k$, $p=1$ est racine multiple, toutes les autres racines étant simples, et le cercle de rayon 1 fait plusieurs fois partie de la courbe.

Remarque. — Considérons

$$U_{m,1} = \frac{1}{2^{m+1}m!}\,\frac{\partial^{m+1}(x^2+y^2-1)^{m+1}}{\partial x^m\,\partial y},$$

effectuons la dérivation par rapport à y :

$$U_{m,1} = \frac{2(m+1)y}{2^{m+1}m!}\,\frac{\partial^m(x^2+y^2-1)^m}{\partial x^m}$$

$$= \frac{(m+1)y}{2^m m!}\,\frac{\partial^m(x^2+y^2-1)^m}{\partial x^m},$$

$$U_{m,1} = (m+1)y\,U_{m,0}.$$

La courbe se composera donc d'un axe et d'une série d'ellipses définies par le théorème ci-dessus.

Pour étudier l'allure générale des courbes représentées par $U_{m,n} = 0$, nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme. — *La suite des polynomes*

$$\frac{d^m(x^2-1)^k}{dx^m},\quad \frac{d^m(x^2-1)^{k-1}}{dx^m},\quad \frac{d^m(x^2-1)^{k-2}}{dx^m},\quad \ldots$$

forme une suite de Sturm, l'indice de dérivation restant invariable et l'exposant entier et positif décroissant jusqu'à ce que le polynome soit de degré un ou zéro, pourvu que x reste compris entre 0 *et* 1, *ces limites étant exclues.*

Désignons par P_0, P_1, P_2, ... les polynomes de cette suite ordonnés par ordre d'exposants décroissants. Ils formeront une suite de Sturm dans l'intervalle donné, si les conditions suivantes y sont vérifiées :

1° Toutes les fonctions de la suite sont continues;

2° La dernière fonction de la suite garde un signe constant dans l'intervalle;

3° La première fonction P_0 n'admet que des racines simples dans l'intervalle considéré;

4° Deux fonctions consécutives ne s'annulent pas simultanément;

5° P_r étant une fonction quelconque de la suite autre que la première ou la dernière, si $P_r = 0$, P_{r-1} et P_{r+1} prennent des valeurs de signes contraires;

6° x traversant en croissant une racine de $P_0 = 0$, le rapport $\frac{P_0}{P_1}$ passe du négatif au positif.

Ces conditions étant réalisées, le nombre de variations de signe perdues par la suite, x passant de la valeur x_0 à la valeur x_1, $0 < x_0 < x_1 < 1$ est égal au nombre des racines de P_0 comprises entre x_0 et x_1.

1° La condition de continuité est remplie, puisque nous considérons des polynomes entiers.

2° La dernière fonction de la suite garde un signe invariable, car elle est soit une constante, soit x multiplié par une constante, et dans ce dernier cas son signe est invariable entre zéro et un.

3° P_0 n'admet que des racines simples dans l'intervalle, car $x = \pm 1$ sont les seules racines multiples possibles et elles sont exclues de l'intervalle. Les autres racines sont simples, comme il ressort du théorème de Rolle.

4° Rendons $P_r = \frac{d^m(x^2-1)^p}{dx^m}$ homogène et appliquons le théorème d'Euler.

En égalant à 1 la variable d'homogénéité, on a

$$(2p-m)\frac{d^m(x^2-1)^p}{dx^m} = x\frac{d^{m+1}(x^2-1)^p}{dx^{m+1}} - 2p\frac{d^m(x^2-1)^{p-1}}{dx^m}$$

ou bien

$$(\alpha) \quad (2p-m)P_r = x\frac{dP_r}{dr} - 2pP_{r+1} \qquad (p = k - r).$$

Si $P_r = 0$ et $P_{r+1} = 0$ on aurait $\frac{dP_r}{dx} = 0$, ce qui est

impossible, P_r n'admettant que des racines simples entre o et 1.

5° Soient x_1, x_2, x_3, ... les zéros de $P_r = 0$ par ordre croissant. Donnons à x, dans la formule (α), deux valeurs consécutives de cette suite x_i et x_{i+1} :

$$\begin{array}{c|c} P_r(x_i) = 0, & P_r(x_{i+1}) = 0, \\ x_i \dfrac{d P_r(x_i)}{dx_i} = 2p P_{r+1}(x_i), & x_{i+1} \dfrac{d P_r(x_{i+1})}{dx_{i+1}} = 2p P_{r+1}(x_{i+1}); \end{array}$$

or, entre x_i et x_{i+1}, $\dfrac{dP_r}{dx}$ s'est annulé une seule fois en changeant de signe, puisque toutes les racines de $P_r = 0$ sont réelles et qu'elles sont simples entre -1 et $+1$; donc P_{r+1}, prenant des valeurs de signes contraires pour x_i et x_{i+1}, s'est annulé dans l'intervalle.

Deux racines de P_r comprennent un nombre impair de racines de P_{r+1}.

Étudions l'intervalle $(+\varepsilon, x_1)$, ε étant un nombre positif aussi petit qu'on voudra.

Pour $x = \varepsilon$, P_r et P_{r+1} auront le signe de leur terme de plus bas degré

$$\begin{aligned} (x^2-1)^p &= (-1)^p + \frac{p}{1}(-1)^{p-1}x^2 \\ &\qquad + \frac{p(p-1)}{1.2}(-1)^{p-2}(x^2)^2 + \ldots, \\ (x^2-1)^{p-1} &= (-1)^{p-1} + \frac{p-1}{1}(-1)^{p-2}x^2 \\ &\qquad + \frac{(p-1)(p-2)}{1.2}(-1)^{p-3}(x^2)^2 + \ldots. \end{aligned}$$

Les termes de même rang sont de signes contraires pour $x > 0$. En dérivant m fois pour former P_r et P_{r+1}, nous supprimons le même nombre de termes des deux développements, ceux dont le degré en x est inférieur à m. Les termes de plus bas degré de P_r et P_{r+1} seront donc de signes contraires pour $x = +\varepsilon$.

Si m impair, $P_r = \frac{d^m(x^2-1)^p}{dx^m}$ s'annule pour $x = 0$; donc $\frac{dP_r}{dx} = 0$ admet une racine entre 0 et x_1. Le terme de plus bas degré de P_r est du premier degré, celui de $\frac{dP_r}{dx}$ sera la dérivée de ce terme dans P_r.

P_r et $\frac{dP_r}{dx}$ sont donc de même signe pour $x = +\varepsilon$; ils seront donc de signes contraires pour $x_1 - \varepsilon$, $\frac{dP_r}{dx}$ s'annulant dans l'intervalle.

Si m pair, P_r s'annule pour $x = -x_1$ et $x = x_1$, qui sont deux racines consécutives, $\frac{dP_r}{dx} = 0$ pour $x = 0$ entre ces deux racines. Le terme de plus bas degré de P_r est une constante; le terme de plus bas degré de $\frac{dP_r}{dx}$ proviendra du terme en x^2 de P_r et par suite P_r et $\frac{dP_r}{dx}$ seront de signes contraires pour $x = +\varepsilon$. Comme aucune de ces fonctions ne s'annule entre 0 et x_1, P_r et $\frac{dP_r}{dx}$ seront de signes contraires pour $x_1 - \varepsilon$.

Désignons par sign P_r le signe de P_r et par $-$ sign P_r le signe contraire. Nous pouvons résumer ces résultats dans les Tableaux qui suivent. Le signe indiqué dans le Tableau sera celui du terme correspondant de la formule écrite au-dessus sans tenir compte du signe qui le précède dans cette formule :

$(2p-m)P_r$	$= x\frac{dP_r}{dx}$	$-2pP_{r+1}$		
sign P_r	$-$ sign P_r	$-$ sign P_r	$x = +\varepsilon$	m pair,
sign P_r	$-$ sign P_r	$-$ sign P_r	$x = x_1 - \varepsilon$	
sign P_r	sign P_r	$-$ sign P_r	$x = +\varepsilon$	m impair.
sign P_r	$-$ sign P_r	$-$ sign P_r	$x = x_1 - \varepsilon$	

Dans le voisinage de zéro, P_r et P_{r+1} sont toujours de signes contraires. En isolant P_{r+1} dans le second membre, connaissant le signe de $\frac{dP_r}{dx}$, on en déduit facilement sign P_{r+1} pour $x = x_1 - \varepsilon$.

On voit qu'en tout cas P_{r+1} ne peut admettre qu'un nombre pair de racines entre o et x_1.

Désignons par x_e la dernière racine de P_r inférieure à $+1$. P_r est divisible par $(x^2-1)^{p-m}$ et $\frac{dP_r}{dx}$ et P_{r+1} sont divisibles par $(x^2-1)^{p-m-1}$ si $p > m$.

Divisons les deux membres de la formule (α) par $(x^2-1)^{p-m-1}$:

$$\frac{(2p-m)P_r}{(x^2-1)^{p-m-1}} = \frac{x\frac{dP_r}{dx}}{(x^2-1)^{p-m-1}} - 2p\frac{P_{r+1}}{(x^2-1)^{p-m-1}};$$

pour $x = 1$ le premier membre s'annule, les deux termes du second membre deviennent égaux.

Pour $x = x_e$ et pour $x = 1$, on a donc

$$\frac{x\frac{dP_r}{dx}}{(x^2-1)^{p-m-1}} = \frac{2pP_{r+1}}{(x^2-1)^{p-m-1}}.$$

Or, dans l'intervalle, $\frac{dP_r}{dx}$ s'est annulé une fois; par suite P_{r+1} s'est annulé en changeant de signe.

$$P_r = \frac{d^m(x^2-1)^p}{dx^m} \qquad \text{est de degré } p-m,$$

$$P_{r+1} = \frac{d^m(x^2-1)^{p-1}}{dx^m} \qquad \text{est de degré } p-m-2.$$

Si P_{r+1} admet une racine après chaque racine positive de P_r et une avant chaque racine négative de P_r autres que $+1$ et -1, nous aurons pour P_{r+1}

$$2p - m - 2(p-m) = m,$$

racines autres que $+1$ et -1, car il y a en tout $2p-m$ racines de P_r et ± 1 sont chacune de degré $p-m$ de multiplicité.

P_{r+1} admet ± 1 avec le degré de multiplicité

$$p-m-1;$$

nous aurons donc pour P_{r+1} un nombre de racines égal à

$$m+2(p-m-1)=2p-m-2;$$

ce nombre est précisément le degré.

Les racines positives simples de $P_{r+1}=0$ séparent les racines positives de $P_r=0$.

Soient $x_1, x_2, x_3, \ldots$ les racines positives de $P_r=0$ et $x'_1, x'_2, x'_3, \ldots$ celles de $P_{r+1}=0$, on a

$$0<x_1<x'_1<x_2<x'_2<\ldots<x_e<x'_e<1;$$

entre 0 et x_1, P_r et P_{r+1} sont de signes contraires; entre x_1 et x'_1 de même signe.

Avant une racine de P_r et dans son voisinage, P_r et P_{r+1} sont de signes contraires.

Du même raisonnement il résulte que P_{r-1} et P_r sont de même signe, donc la condition 5° est vérifiée.

6° Considérons en particulier P_0 et P_1 immédiatement avant une racine de P_0; P_0 et P_1 sont de signes contraires, le rapport $\frac{P_0}{P_1}$ passera donc du négatif au positif lorsque x traverse cette racine.

Les polynomes forment donc bien une suite de Sturm entre $+\varepsilon$ et $1-\varepsilon$.

Proposons-nous maintenant d'étudier la fonction y définie par $U_{m,n}=0$. Partons pour cela de l'expression

$$Q_0=\frac{\partial^m(x^2+y^2-1)^{m+n}}{\partial x^m}=(x^2+y^2-1)^n R_0=0$$

$$(R_0\neq 0 \quad \text{si} \quad x^2+y^2-1=0).$$

Nous avons vu que la courbe $R_0 = 0$ se composait d'ellipses dont le grand axe est Oy, dont le centre est à l'origine et dont la longueur du demi grand axe est l'unité.

Les conditions suivantes sont évidemment vérifiées :

1° Pour $x = +\varepsilon$ toutes les racines de $Q_0(y) = 0$ sont réelles et comprises entre $-\sqrt{1-\varepsilon^2}$ et $+\sqrt{1+\varepsilon^2}$, un certain nombre de racines pouvant être confondues avec ces limites, mais toutes les autres étant simples.

2° La courbe $Q_0(x, y) = 0$ n'admet de points multiples que sur $x^2 + y^2 - 1 = 0$, qui en ce cas est ligne de points multiples.

3° La courbe $Q_0(x, y) = 0$ n'admet de points à tangente parallèle à Oy que sur Ox.

Si de telles propriétés ont été démontrées pour

$$Q_k = \frac{\partial^{m+k}(x^2+y^2-1)^{m+n}}{\partial x^m\,\partial y^k} = 0,$$

elles subsistent pour la courbe

$$Q_{k+1} = \frac{\partial Q_k}{\partial y} = 0.$$

En effet, pour $x = +\varepsilon$, toutes les racines de

$$Q_k(y) = 0$$

sont réelles et celles de $\frac{\partial Q_k}{\partial y} = 0$ le seront également et seront séparées par les racines de $Q_k(y) = 0$.

Soient $y_1, y_2, y_3, \ldots$ les racines positives de $Q_k = 0$; $y'_1, y'_2, y'_3, \ldots$ celles de Q_{k+1}; $y = 0$ est racine soit de $Q_k = 0$, soit de $Q_{k+1} = 0$, et nous la désignerons par y_0 ou y'_0 suivant qu'elle sera racine de $Q_k = 0$ ou

de $Q_{k+1} = 0$.

$$y_0 < y'_1 < y_1 < y'_2 < y_2 < \ldots \qquad \text{si } k \text{ impair,}$$
$$y'_0 < y_1 < y'_1 < y_2 < y'_2 < \ldots \qquad \text{si } k \text{ pair.}$$

Dans le voisinage de $x = \varepsilon$ les valeurs de y sont des fonctions continues et uniformes de x à cause de la condition 3°.

Supposons que deux racines y'_r et y'_{r+1} deviennent égales pour $x = x'$, on aura dans le voisinage

$$y'_r < y_r \quad < y'_{r+1} \qquad (k \text{ impair}),$$

ou

$$y'_r < y_{r+1} < y'_{r+1} \qquad (k \text{ pair});$$

pour $x = x'$ on aurait alors

$$y'_r = y_r \quad = y'_{r+1}$$

ou

$$y'_r = y_{r+1} = y'_{r+1}.$$

Q_k et $\frac{\partial Q_k}{\partial y}$ auraient une racine commune, ce qui est impossible en vertu de la condition 2°, puisque nous avons supposé qu'il y avait inégalité dans le voisinage de $x = x'$, ce qui exclut les points de $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Cela ne pourra donc avoir lieu que si $y'_r = -y'_r$ lorsque toutes les racines y et y' qui étaient comprises primitivement entre ces deux ont pris des valeurs imaginaires. Cela devra donc se produire d'abord pour y'_1 et $-y'_1$.

Le développement de Q_{k+1} est de la forme

$$Q_{k+1} \equiv a_0 \frac{d^m (x^2-1)^r}{dx^m}$$
$$+ a_1 y^2 \frac{d^m (x^2-1)^{r-1}}{dx^m} + a_2 y^4 \frac{d^m (x^2-1)^{r-2}}{dx^m} + \ldots = 0$$

si $k+1$ est pair; si $k+1$ est impair on a une expres-

sion de cette forme multipliée par y; a_0, a_1, a_2, ... sont des nombres positifs.

Pour $x = \varepsilon$, l'équation obtenue, en supprimant s'il y a lieu le facteur y, ne présente que des variations de signe dans la suite des coefficients, car toutes les racines de l'équation en y étant réelles, celles de l'équation en y^2 seront positives.

Or la suite de ces coefficients n'est autre que la suite de Sturm étudiée.

La racine $y_1'^2$ doit s'annuler la première, x allant en croissant. Ceci se produit pour la plus petite racine positive de

$$\frac{d^m(x^2-1)^r}{dx^m} = 0;$$

au delà de cette valeur x_1 la suite de Sturm formée par les coefficients perd une variation. Les racines y_1' et $-y_1'$ prennent des valeurs imaginaires conjuguées, la racine $y_1'^2$ est devenue négative, car y_1' et $-y_1'$ étant des valeurs conjuguées doivent être imaginaires pures. Cette racine y'^2 ne peut redevenir positive puisque la suite des coefficients de l'équation vient de perdre une variation, que le nombre des variations restantes est égal au nombre des racines positives en y^2 et que l'on ne peut que perdre des variations dans la suite de Sturm.

Pour $x = x_2$, $\frac{d^m(x^2-1)^r}{dx^m} = 0$ une seconde fois, x allant en croissant. La suite des coefficients perd une seconde variation.

L'équation en y^2 perd donc une racine positive qui devient négative pour $x > x_2$. Cette racine ne peut redevenir positive, puisqu'on ne peut regagner de variations. On peut continuer ce raisonnement de proche en proche. Les valeurs réelles de y sont

toujours comprises entre $-\sqrt{1-x^2}$ et $+\sqrt{1-x^2}$; la suite des coefficients ne présente plus de variations pour $x > 1$, la courbe est donc entièrement située à l'intérieur du cercle $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Ceci est vrai en particulier pour $k = n$ et par conséquent pour

$$\frac{\partial^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n}}{\partial x^m\,\partial y^n} = 0.$$

En calculant successivement $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, on trouve pour terme indépendant de y

$$\frac{d^m(x^2-1)^{m+n-s}}{dx^m} \qquad \text{si} \qquad n = 2s,$$

et pour terme en y

$$y\,\frac{d^m(x^2-1)^{m+n-s}}{dx^m} \qquad \text{si} \qquad n = 2s-1$$

à un facteur constant près.

$x = \pm 1$ sont donc des zéros d'ordre $n - s$ de ces expressions. La courbe peut donc présenter un point multiple en ces points de Ox.

Transportons l'origine au point $x = -1$, $y = 0$. La courbe étant symétrique par rapport aux axes de coordonnées, l'étude faite pour les valeurs positives de x s'applique immédiatement au cas de x négatif.

$$Q_n = \frac{\partial^{m+n}[y^2 + x(x-2)]^{m+n}}{\partial x^m\,\partial y^n},$$

$$\begin{aligned}
&[(y^2-2x)+x^2]^{m+n} \\
&\quad = (y^2-2x)^{m+n} + \frac{m+n}{1}x^2(y^2-2x)^{m+n-1} + \ldots \\
&\qquad + \frac{(m+n)(m+n-1)\ldots(m+n-p+1)}{p!} \\
&\qquad\quad \times x^{2p}(y^2-2x)^{m+n-p} + \ldots;
\end{aligned}$$

en dérivant m fois en x on obtient comme terme

général

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^m}{\partial x^m}[x^{2p}(y^2-2x)^{m+n-p}]\\
&\quad= x^{2p}(y^2-2x)^{n-p}(-2)^m(m+n-p)\ldots(n-p+1)2p\\
&\qquad+\frac{m}{1}x^{2p-1}(y^2-2x)^{n-p-1}\\
&\qquad\quad\times(-2)^{m-1}(m+n-p)\ldots(n-p+2)2p(2p+1)\\
&\qquad+\frac{m(m-1)}{1.2}x^{2p-2}(y^2-2x)^{n-p-2}\\
&\qquad\quad\times(-2)^{m-2}(m+n-p)\ldots(n-p+3)\\
&\qquad\quad\times 2p(2p-1)(2p-2)\\
&\qquad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad+2p!(y^2-2x)^{n+p}(-2)^{2p}.
\end{aligned}$$

Faisons la substitution

$$y = t\sqrt{x},$$

en remarquant que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{\partial f}{\partial t}.$$

Dans le développement ci-dessus nous aurons x^{n+p} en facteur. Il vient

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^m}{\partial x^m}[x^{2p}(y^2-2x)^{m+n-p}]\\
&\quad= x^{n+p}[(t^2-2)^{n-p}(-2)^m(m+n-p)\ldots(n-p+1)]+\ldots\\
&\qquad\qquad+2p!(t^2-2)^{n+p}(-2)^{2p}];
\end{aligned}$$

dérivons n fois par rapport à y, ou, ce qui revient au même, par rapport à t en multipliant par $\frac{1}{x^{\frac{n}{2}}}$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^{m+n}[x^{2p}(y^2-2x)^{m+n-p}]}{\partial x^m\,\partial y^n}\\
&\quad=\frac{x^{n+p}}{x^{\frac{n}{2}}}[(t^2-2)^{n-p}(-2)^m(m+n-p)\ldots(n-p+1)+\ldots\\
&\qquad\qquad+2p!(t^2-2)^{n+p}(-2)^{2p}]^{(n)}\\
&\qquad\qquad(p=0,1,2,\ldots),
\end{aligned}$$

l'indice (n) indiquant les n dérivations par rapport à t à l'intérieur du crochet.

Après la substitution nous pouvons mettre $x^{\frac{n}{2}}$ en facteur dans l'équation $Q_n = 0$. Supprimons ce facteur et posons $x = 0$, nous obtiendrons des termes en t qui proviennent du cas où $p = 0$ dans la dernière formule. Ce sont les termes provenant de

$$(y^2 - 2x)^{m+n};$$

on a en effet

$$\frac{\partial^{m+n}(y^2 - 2x)^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}$$
$$= (m+n)(m+n-1)\ldots(n+1)(-2)^m \frac{\partial^n (y^2 - 2x)^n}{\partial y^n}.$$

Faisons la substitution $y = t\sqrt{x}$;

$$\frac{\partial^n (y^2 - 2x)^n}{\partial y^n} = \frac{x^n}{x^{\frac{n}{2}}} \frac{\partial^n (t^2 - 2)^n}{\partial t^n} = x^{\frac{n}{2}} \frac{d^n (t^2 - 2)^n}{dt^n},$$

$$\frac{d^n (t^2 - 2)^n}{dt^n} = 0$$

est l'équation définissant la décomposition en cycles dans le voisinage du point $x = 0$, $y = 0$. On a donc dans le voisinage de ce point $y = t\sqrt{x}$, t étant une série entière en x prenant pour $x = 0$ la valeur d'une racine de l'équation en t.

La surface de Riemann de la fonction $U_{m,n} = 0$ présente donc dans le voisinage de $x = -1$, $y = 0$ une série de points de ramification simples. La racine $t = 0$ que l'on obtient dans le cas de n impair, correspond à l'axe Ox qui dans ce cas fait partie de la courbe.

Posons $t = \theta\sqrt{2}$,

$$\frac{d^n (t^2 - 2)^n}{dt^n} = \frac{2^n}{2^{\frac{n}{2}}} \frac{d^n (\theta^2 - 1)^n}{d\theta^n} = 0.$$

La décomposition en systèmes circulaires dépend donc de la recherche des racines d'un polynome de Legendre.

x tendant vers zéro, on a

$$\frac{y}{x} = \frac{t}{\sqrt{x}},$$

et la série t prenant une valeur finie pour $x = 0$, il en résulte que toutes les branches de courbe ont une tangente commune parallèle à Oy.

Si $n = 2s$ ou $n = 2s - 1$, le point multiple est d'ordre s.

Le point $x = 0$, $y = -1$ est un point multiple d'ordre r si $m = 2r$ ou $m = 2r - 1$. On aurait

$$x = g\sqrt{y},$$

g représentant une série entière en y prenant pour $y = 0$ la valeur d'une racine non nulle de

$$\frac{d^m(g^2 - 2)^m}{dg^n} = 0$$

en supposant l'origine transportée en ce point.

Il en résulte donc que y est développable en série suivant les puissances de x^2, comme l'indique la théorie des fonctions inverses. Le point $x = 0$, $y = -1$ n'est donc pas un point de ramification de la fonction algébrique $U_{m,n}(x, y) = 0$.

Une racine y'_i est réelle pour $x = +\varepsilon$ et nulle pour $x = x_i$. On a donc

$$\begin{array}{l} y'_i(\varepsilon) - m\varepsilon > 0 \\ y'_i(x_i) - mx_i < 0 \end{array} \qquad (m > 0).$$

On a donc pour chaque branche de courbe un point d'intersection avec une droite du premier quadrant

passant par l'origine. En tenant compte de ce que les axes peuvent faire partie de la courbe, on trouve que la courbe peut avoir $(m+n)$ points d'intersection réels avec une droite.

La courbe est donc située à l'intérieur du cercle de rayon 1, sauf si les axes de coordonnées en font partie. Elle se compose d'une série de branches enveloppant l'origine et s'enveloppant mutuellement. Elle ne peut admettre de points multiples réels que pour $x=0$, $y=\pm 1$ et $x=\pm 1$, $y=0$.

Posons

$$m+n=p.$$

On vérifie facilement, comme le montre M. Tramm [1], que l'on ne peut obtenir de point multiple sur Ox que pour

$$m \leqq p-4,$$

et sur Oy que pour

$$n \leqq p-4,$$

par conséquent si

$$m+n \leqq 2p-8$$

ou

$$p \geqq 8,$$

pour avoir des points singuliers sur les deux axes.

Ces résultats sont confirmés par l'étude des équations développées. La Thèse de M. Tramm contient un Tableau complet de ces équations pour toutes les valeurs jusqu'à

$$p=m+n=10.$$

Exemple. — Construisons par exemple la courbe

$$U_{3,4}=0.$$

---

(1) TRAMM, *Dissertation*, p. 24 et suiv.

L'équation développée est (Tramm, p. 12)

$$x[3^2.7y^6+5.7y^4(5x^2-3)$$
$$+3.5y^2(x^2-1)(7x^2-3)+(x^2-1)^2(9x^2-3)]=0.$$

Nous voyons que l'axe Oy fait partie de la courbe.

Les coefficients de l'équation en y^2 sont, à des facteurs constants près,

$$(x^2-1)^2(9x^2-3),\quad (x^2-1)(7x^2-3),\quad (5x^2-3),\quad 1.$$

Leurs racines positives autres que 1 sont

$$\sqrt{\frac{3}{9}},\ \sqrt{\frac{3}{7}},\ \sqrt{\frac{3}{5}},$$

x prenant une valeur voisine de zéro. On voit que la suite des coefficients ne présente que des variations, et qu'elle en perd une seulement lorsque x croissant prend la valeur $\sqrt{\frac{3}{9}}$.

Ils forment donc bien une suite de Sturm, ainsi qu'il a été montré dans le cas général.

On voit de plus que pour $y=0$, $x=\pm 1$ sont des racines doubles. Dans ce cas nous aurons donc deux points doubles sur Ox.

La courbe a l'aspect indiqué par la figure.

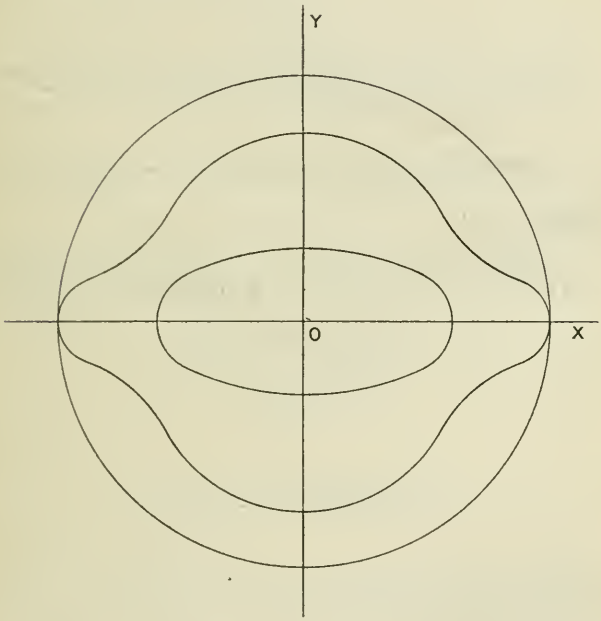
Nous avons

$$\begin{aligned}(x^2+y^2-1)^7 = y^{14} &+ 7y^{12}(x^2-1) + 21y^{10}(x^2-1)^2\\ &+ 35y^8(x^2-1)^3 + 35y^6(x^2-1)^4\\ &+ 21y^4(x^2-1)^5 + 7y^2(x^2-1)^6\\ &+ (x^2-1)^7,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3(x^2+y^2-1)^7}{\partial x^3} = \quad & 21y^{10}\frac{d^3(x^2-1)^2}{dx^3} + 35y^8\frac{d^3(x^2-1)^3}{dx^3}\\ &+ 35y^6\frac{d^3(x^2-1)^4}{dx^3} + 21y^4\frac{d^3(x^2-1)^5}{dx^3}\\ &+ 7y^2\frac{d^3(x^2-1)^6}{dx^3} + \frac{d^3(x^2-1)^7}{dx^3} = 0;\end{aligned}$$

cette dernière équation représente quatre fois le cercle $x^2 + y^2 - 1 = 0$, l'ellipse $\frac{x^2}{\frac{3}{13}} + y^2 - 1 = 0$ et l'axe Oy.

Si nous la dérivons en y, nous pouvons, pour une



valeur donnée de x entre zéro et 1, dire un nombre de racines qui sont certainement réelles.

Dérivons quatre fois en y.

$$\frac{\partial^7 (x^2 + y^2 - 1)^7}{\partial x^3 \, \partial y^4}$$

$$= 21.10.9.8.7 y^6 \frac{d^3(x^2-1)^2}{dx^3} + 35.8.7.6.5 y^4 \frac{d^3(x^2-1)^3}{dx^3}$$

$$+ 35.6.5.4.3 y^2 \frac{d^3(x^2-1)^4}{dx^3} + 21.4.3.2.1 \frac{d^3(x^2-1)^5}{dx^3} = 0.$$

pour x positif et très petit, toutes les racines en y sont réelles. La branche de courbe qui correspond à la racine que nous avons désignée par y'_1 vient couper Ox pour $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, les autres branches correspondant à des valeurs positives de y vont passer par le point

$$x = +1.$$

L'équation de la courbe dans ce cas a la forme qui a été utilisée dans l'étude du cas général.

[123a]

CONTINUANTS : APPLICATIONS A LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. A. DELTOUR.

(*Suite et fin*) [1].

TROISIÈME PARTIE.

95. La considération des continuants fournit de nouvelles démonstrations de certains théorèmes relatifs à la décomposition des nombres entiers en somme de carrés.

Cet article contient deux de ces démonstrations : la première se rapporte à la décomposition d'un nombre premier de la forme $4h+1$ en une somme de deux carrés (théorème de Fermat); la seconde est celle de la formule de Liouville qui sert à déterminer dans cer-

---

[1] Voir *Nouv. Ann.*, 4e série, t. I et VIII, 1908, p. 49, 172, 264, 481 et 535.

tains cas le nombre des décompositions d'un nombre donné en une somme de carrés.

96. *Démonstration du théorème de Fermat relatif à la décomposition d'un nombre premier $p = 4h + 1$ en une somme de deux carrés.* — Les formules indiquées au n° 41 montrent que :

1° Un continuant symétrique $(\alpha, \underline{\alpha})$ ayant un nombre pair d'éléments entiers représente un nombre entier de la forme $x^2 + y^2$ (x, y premiers entre eux) et *vice versa;*

2° Un continuant symétrique positif réduit $(\alpha, m, \underline{\alpha})$ ayant un nombre impair d'éléments $\geqq 3$ représente un produit xy dont les facteurs sont > 1 et ne peut pas représenter un nombre premier.

Cela posé, on sait que pour un nombre premier $p = 4h + 1$, le nombre des continuants positifs réduits de valeur p est $\frac{p-1}{2}$ (50, Remarque 1°) et par conséquent pair.

Ces continuants sont symétriques ou non.

Dans ce dernier cas, l'un d'eux (β) et son inverse $(\underline{\beta})$ sont différents.

Les continuants non symétriques se correspondent ainsi deux à deux. Il y a donc un nombre pair de continuants symétriques.

Or, le continuant (p) de résidu 1 est symétrique. D'ailleurs, c'est évidemment le seul n'ayant qu'un élément.

Il y a donc au moins un continuant symétrique de valeur p dont le nombre d'éléments est $\geqq 2$ et par conséquent pair.

D'où résulte

$$p = x^2 + y^2.$$

Il ne peut pas y en avoir deux. Car, soient R_1, R_2 leurs résidus. Ceux-ci satisferaient, d'après la relation (VI) (n° 19), aux congruences

$$R_1^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$
$$R_2^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

d'où

$$R_1^2 - R_2^2 \equiv 0 \pmod{p},$$

ce qui est impossible puisque $R_1 R_2$ sont $\leqq \frac{p-1}{2}$.

97. Le théorème de Liouville, dont on trouvera plus loin l'énoncé, se présentera comme une conséquence de la formule (I) du n° 5 :

$$(\mathrm{I}) \qquad (\alpha, \beta) = (\alpha)(\beta) + (\alpha_{0,1})(\beta_{1,0}).$$

Pour le démontrer, il faut d'abord comparer celle-ci aux diverses expressions d'un nombre positif donné N de la forme

$$(1) \qquad N = ab + a'b',$$

où a, a' sont premiers entre eux, ainsi que b, b', tous ces nombres étant entiers positifs et différents de zéro.

A cet effet, nous supposerons que dans la formule (I) tous les éléments sont positifs, le dernier de (α) ou le premier de (β) pouvant seuls être nuls.

98. Il s'agit de montrer que *toute expression* (1) *de* N *est identique à l'une de celles qui résultent de l'application de la formule* (I) *à chacun des continuants réduits* (α, β) *de valeur* N *ainsi définis et* vice versa.

En effet, considérons d'abord l'ensemble de celles où $a > a'$ et où, pour les valeurs particulières $a = a' = 1$, on a $b < b'$.

Comme a, a' sont premiers entre eux, ainsi que b, b',

toute égalité (1) est susceptible de s'identifier avec la formule (I) en posant

$$(\alpha) = a, \qquad (\beta) = b,$$
$$(\alpha_{0,1}) = a', \qquad (\beta_{1,0}) = b',$$

d'où l'on déduit

$$(\alpha, \beta) = N.$$

On satisfait à ces égalités en prenant pour (α) le continuant positif court correspondant à la fraction $\frac{a}{a'}$ (n° 50); de même pour (β) celui de $\frac{b}{b'}$ si $b > b'$, ou pour $(\beta_{1,0})$ celui de $\frac{b'}{b}$ si $b < b'$, en faisant alors $(\beta) = (0, \beta_{1,0})$.

Dans le premier cas $(b > b')$, le continuant (α, β) est positif réduit. Dans le second, le premier élément de β est zéro.

L'égalité (1) est donc toujours représentée, et d'une seule façon, par la formule (I) dans laquelle (α, β) est un continuant réduit de valeur N où le premier élément de (β) peut seul être nul.

D'ailleurs, à deux systèmes différents de valeurs de a, a'; b, b' correspondent deux systèmes distincts de suites α, β.

Inversement, en mettant un continuant positif réduit de N sous l'une des formes (α, β), $(\alpha, 0, \beta_{1,0})$, dans lesquelles (α), (β), $(\beta_{1,0})$ sont des continuants positifs, la formule (I) représente évidemment une certaine décomposition (1) de N.

En outre, quel que soit le continuant de N considéré, à deux systèmes différents de suites α, β ou α, $\beta_{1,0}$ correspondent deux systèmes distincts de valeurs de a, a'; b, b'.

On reproduit donc ces systèmes de valeurs, c'est-à-dire toutes les expressions (1) au moyen de la for-

mule (1) appliquée de toutes les manières possibles à chacun des continuants positifs réduits de N.

Remarque. — Pour former les différentes suites partielles α qui correspondent à un continuant donné de N, si n, n_1 désignent respectivement la somme des éléments de (α) et celle des éléments du continuant, il faut donner à n successivement toutes les valeurs de 1 à $n_1 - 1$.

Exemple :

$$N = (2, 1, 3),$$
$$(\alpha) = (1), (2), (2, 1), (2, 1, 1), (2, 1, 2).$$

Dans les conditions admises, le nombre des décompositions de N sous la forme $ab + a'b'$ est donc $\Sigma(n_1 - 1)$, Σ se rapportant à tous les continuants positifs réduits de N.

99. *Lorsqu'on prend l'ensemble des expressions* (1) *pour lesquelles on a* $a < a'$ *et* $b > b'$ *pour* $a = a' = 1$ *au lieu de* $a > a'$ *et* $b < b'$ *pour* $a = a' = 1$, *on trouve un mode de représentation semblable.*

Il suffit de remplacer (α) par $(\alpha, 0)$ dans les formules. Chacune des nouvelles expressions s'obtient, en effet, en permutant dans chacune des précédentes a avec a' et b avec b'.

Ainsi (α) $(0, \beta)$ deviennent $(\alpha, 0)$, (β); (α), (β) deviennent $(\alpha, 0)$, $(0, \beta)$.

On voit d'ailleurs que le premier continuant (α) est (1) pour la série $a > a'$ et (1, 0) pour la série $a < a'$; dans les deux cas, on a

$$a = a' = 1$$

et

$$N = b + b'.$$

Pour $(\alpha) = (1)$, on a en effet $b < b'$ et pour $(\alpha) = (1, 0)$, $b > b'$.

100. *Représentation des expressions* (1) *du n° 97, dans lesquelles on a*

$$N = 2m, \qquad ab = m', \qquad a'b' = m'',$$

m, m', m'' étant des nombres impairs.

En conservant la notation déjà employée, l'ensemble de ces expressions est représenté de la même manière qu'aux n°s 98, 99 ; seulement, de tous les systèmes de suites α, β, on ne retient que ceux dans lesquels (α), $(\alpha_{0,1})$, c'est-à-dire a et a' sont impairs. Cette dernière condition suffit d'ailleurs pour que (β), $\beta_{1,0})$, c'est-à-dire b, b', soient aussi impairs, puisque ces nombres sont premiers entre eux et que (α, β) est pair.

101. Dans ce mode de représentation, les nombres impairs a, a' jouissent des trois propriétés suivantes :

1° *Si a, a' et a_1, a'_1 sont deux couples consécutifs de valeurs impaires,*

$$a = (\alpha), \qquad a_1 = (a, \varphi),$$
$$a' = (\alpha_{0,1}), \qquad a'_1 = (\alpha, \varphi_{0,1}),$$

correspondant à deux suites α, $\alpha\varphi$, d'un continuant donné $N = (\alpha, \beta) = (\alpha, \varphi, \beta')$ (n° 98, *Remarque*) *et tels que $(a - a')$ et $(a_1 - a'_1)$ soient de même signe, on a*

$$(2) \qquad a + a' = [a_1 - a'_1].$$

2° *Si a, a' correspondent à la première suite α de ce continuant, on a*

$$(3) \qquad a - a' = 0.$$

3° *Si a, a' correspondent à la dernière suite α, on a*

$$(4) \qquad a + a' = N.$$

Pour démontrer la première, supposons d'abord $(a - a')$, $(a_1 - a'_1)$ positifs.

Puisqu'on a

$$a_1 = (\alpha, \varphi),$$
$$a'_1 = (\alpha, \varphi_{0,1}),$$

le dernier élément de φ est différent de zéro; autrement on aurait $a_1 < a'_1$.

Cette suite peut donc s'écrire

$$\varphi = (1, \psi, 1) \quad \text{ou} \quad \varphi = (0, 1, \psi, 1),$$

suivant qu'elle commence ou non par un terme différent de zéro, la suite ψ contenant ou non des éléments nuls.

On a ainsi dans le premier cas

$$a_1 = (\alpha, 1, \psi, 1) = a(1, \psi, 1) + a'(\psi, 1),$$
$$a'_1 = (\alpha, 1, \psi) = a(1, \psi) + a'(\psi)$$

et, dans le second cas, des expressions analogues.

Pour que les deux couples a, a' et a_1, a'_1 soient consécutifs, il faut prendre pour ψ la suite la plus réduite qui donne pour a_1, a'_1 des valeurs impaires. Comme on le voit facilement, c'est celle où ψ ne contient qu'un seul élément $k \geqq 0$.

On a alors soit

$$\varphi = (1, k, 1)$$

et

$$a_1 = a(k+2) + a'(k+1),$$
$$a'_1 = a(k+1) + a'k;$$

soit

$$\varphi = (0, 1, k, 1)$$

et

$$a_1 = a(k+1) + a'(k+2),$$
$$a'_1 = ak + a'(k+1),$$

relations d'où résulte

$$a + a' = a_1 - a'_1.$$

En particulier, lorsque $k = 0$, (φ) devient (2) ou $(0, 2)$.

Démonstration analogue lorsqu'on suppose $(a - a')$ et $(a - a'_1)$ négatifs, en remplaçant dans les expressions précédentes

$$(1, \psi, 1) \quad \text{par} \quad (1, \psi, 1, 0)$$

ou

$$(0, 1, \psi, 1) \quad \text{par} \quad (0, 1, \psi, 1, 0).$$

On a donc, dans tous les cas,

$$a + a' = [a_1 - a'_1].$$

La seconde proposition est évidente si l'on remarque que le premier continuant partiel (α) est (1) ou $(1, 0)$ pour lequel on a

$$a = (\alpha) = 1,$$
$$a' = (\alpha_{0,1}) = 1.$$

Pour démontrer la troisième, mettons le continuant donné de N sous la forme $(\lambda, 0, 1)$.

Les nombres (λ) et $(\lambda_{0,1}) = (\lambda, 0)$ sont premiers avec $N = 2m = (\lambda, 0, 1)$, par conséquent impairs, et représentent le dernier couple de valeurs a, a' puisque λ est la dernière suite pouvant être prise pour α.

On a dans l'expression de N correspondante

$$b = b' = 1,$$

et par suite

$$N = a + a'.$$

102. Théorème de Liouville [1]. — *Soit m un nombre positif impair tel que $2m = m' + m''$ (m', m'' positifs impairs); si l'on pose*

$$S = \Sigma[f(d' - d'') - f(d' + d'')],$$

---

[1] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t. III, 1858, p. 143.

où f est une fonction paire quelconque, d' un diviseur de m', d'' un diviseur de m'', et où Σ s'étend, pour toutes les valeurs de m' et de m'', à tous les couples de diviseurs d', d'', on trouve

$$S = \Sigma d[f(0) - f(2d)],$$

où d parcourt tous les diviseurs de m.

En posant

$$m' = d'e', \qquad m'' = d''e'',$$

on a

$$2m = d'e' + d''e'',$$

où d', d'', e', e'' peuvent avoir des facteurs communs.

Pour ramener ces expressions au cas du n° 100, décomposons S en parties et désignons par $S_{p,q}$ la somme relative à tous les couples d', d'' pour lesquels p et q sont respectivement les plus grands communs diviseurs de d', d'' et de e', e''.

Occupons-nous d'abord de $S_{1,1}$. Les égalités $2m = d'e' + d''e''$ peuvent être représentées, dans la notation du n° 98, au moyen des continuants (α, β) de $2m$, puisque d', d'' sont premiers entre eux, ainsi que e', e''.

Groupons les termes de $S_{1,1}$ dont les couples d', d'' proviennent d'un même continuant (α, β) et rangeons ces termes dans l'ordre des suites α correspondantes, comme au n° 98 (*Remarque*).

Soit T l'un de ces groupes.

Posons enfin $T = T' + T''$, les termes de T qui composent chacune des parties T', T'' étant caractérisés par le signe de $(d' - d'')$ ou par celui de $e' - e''$, lorsque $d' = d'' = 1$ (n° 99).

Puis cherchons séparément les expressions de T' et T''.

La somme

$$T' = \Sigma[f(d' - d'') - f(d' + d'')]$$

des termes de T correspondant aux expressions (1), pour lesquelles on a

$$d' > d''$$

ou

$$d' = d'' = 1 \qquad \text{et} \qquad e' < e'',$$

se réduit à

$$T' = f(0) - f(2m).$$

Soient, en effet, d', d'' et d'_1, d''_1 deux couples *consécutifs* quelconques provenant des deux continuants partiels (α), $(\alpha') = (\alpha, \varphi_1)$.

Le terme $-f(d' + d'')$ est détruit par le suivant $f(d'_1 - d''_1)$ à cause de la relation (2) (n° 101). Restent donc seulement les deux termes extrêmes où figurent la différence des premières valeurs de d', d'' et la somme des dernières qui sont connues par les relations (3) et (4) (n° 101).

On trouve donc

$$T' = f(0) - f(2m).$$

La somme T'' est l'ensemble des termes de T correspondant aux expressions (1) pour lesquelles on a

$$d' < d''$$

ou

$$d' = d'' = 1 \qquad \text{et} \qquad e' > e''.$$

Or, celles-ci se déduisent des précédentes, relatives au groupe T', en permutant les nombres d' et d'' et, pour les premiers termes où $d' = d'' = 1$, en permutant e' et e''.

Par suite, la somme T'' s'obtient en permutant dans T' les nombres d' et d''. *Comme f est une fonction paire*, l'expression ne change pas.

On a donc

$$T'' = T'.$$

La valeur de T est, par conséquent,

$$T = 2T' = 2[f(0) - f(2m)].$$

Cette formule est indépendante du continuant (α, β) auquel se rapporte le groupe T.

Valeur de $S_{1,1}$. — Pour trouver $S_{1,1}$, il faut totaliser les sommes T relatives à tous les continuants réduits (α, β) de $2m$.

Elles ont même valeur, et leur nombre est $\frac{\varphi(2m)}{2}$ (n° 50, *Remarque*).

On a donc

$$S_{1,1} = \varphi(2m)[f(0) - f(2m)].$$

Valeur de $S_{p,q}$. — Pour un couple de diviseurs d', d'' appartenant à $S_{p,q}$, l'égalité $2m = d'e' + d''e''$, où pq est facteur commun dans le second membre, et par conséquent diviseur de m, peut s'écrire

$$2\frac{m}{pq} = \frac{d'}{p}\frac{e'}{q} + \frac{d''}{p}\frac{e''}{q}.$$

$\frac{d'}{p}$, $\frac{d''}{p}$ sont premiers entre eux, ainsi que $\frac{e'}{q}$, $\frac{e''}{q}$.

On est donc ramené au cas de $S_{1,1}$ lorsqu'on remplace m par $\frac{m}{pq}$.

On trouve encore les relations

$$(2') \qquad d' + d'' = [d'_1 - d''_1],$$

pour deux couples consécutifs de diviseurs et

$$(3') \qquad d' - d'' = 0,$$

$$(4') \qquad d' + d'' = \frac{2m}{q},$$

pour les couples extrêmes.

On déduit de là, comme pour $S_{1,1}$,

$$S_{p,q} = \varphi\left(\frac{2m}{pq}\right)\left[f(0) - f\left(\frac{2m}{q}\right)\right].$$

Valeur de S. — En faisant parcourir à p tous les diviseurs de $\frac{m}{q}$, q restant constant, on a pour total

$$\Sigma_q(S_{p,q}) = \left[\Sigma\,\varphi\left(\frac{2m}{pq}\right)\right]\left[f(0) - f\left(\frac{2m}{q}\right)\right].$$

Or, on sait que

$$\Sigma\,\varphi\left(\frac{2m}{pq}\right) = \frac{m}{q}.$$

On a donc

$$\Sigma_q(S_{p,q}) = \frac{m}{q}\left[f(0) - f\left(\frac{2m}{q}\right)\right].$$

Puis, faisant parcourir à q ou à $\frac{m}{q}$ tous les diviseurs d de m et ajoutant, on a finalement

$$S = \Sigma d[f(0) - f(2d)].$$

Remarque. — Les raisonnements qui précèdent s'appliquent encore si, au lieu de $N = 2m$, on fait $N = 2^h m$.

On trouve dans ce cas

$$S = 2^{h-1}\Sigma d[f(0) - f(2^h d)].$$

103. Rappelons maintenant comment la formule de Liouville permet de déterminer le nombre de décompositions d'un nombre donné $4m$, m étant impair, en une somme de quatre carrés impairs et de $8m$ en une somme de huit carrés impairs.

On sait d'abord que $\Sigma(-1)^{\frac{d-1}{2}}$, où le signe Σ s'applique à tous les diviseurs d de m, est égal au nombre de décompositions de $2m$ en une somme de deux car-

rés impairs, en comptant comme distinctes celles qui ne diffèrent que par l'ordre des termes.

Cela posé, soit

$$4m = X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2.$$

Ces carrés étant impairs, on peut écrire

$$2m' = X^2 + Y^2,$$
$$2m'' = Z^2 + T^2,$$

d'où

$$4m = 2m' + 2m'',$$

où m, m', m'' sont impairs.

Pour avoir toutes les décompositions de $4m$, il suffit d'avoir toutes celles de $2m'$ et de $2m''$ pour toutes les valeurs de m' et de m''.

Or, si dans la formule de Liouville on pose $f(x) = \cos xt$, t étant une constante quelconque, on trouve l'égalité

$$\Sigma[\Sigma \sin d't \, \Sigma \sin d''t] = \Sigma[d \sin^2 dt],$$

et pour $t = \frac{\pi}{2}$

$$\Sigma\left[\Sigma(-1)^{\frac{d'-1}{2}} \Sigma(-1)^{\frac{d''-1}{2}}\right] = \Sigma d.$$

Dans celle-ci, $\Sigma(-1)^{\frac{d'-1}{2}}$, où le signe Σ s'applique à tous les diviseurs d' de m', est égal au nombre de décompositions de $2m'$ en une somme de deux carrés impairs. De même $\Sigma(-1)^{\frac{d''-1}{2}}$ pour $2m''$.

La somme de leurs produits pour toutes les valeurs de m' et de m'' qui forme le premier membre est donc égal au nombre de décompositions de $4m$ en une somme de quatre carrés impairs.

En désignant par $Z_p(m)$ la somme des puissances p de tous les diviseurs de m, ce nombre est Σd ou $Z_1(m)$.

Faisant ensuite successivement $f(x) = x^2$ et x^4, on trouve

$$Z_3(m) = \Sigma Z_1(n) Z_1(2m - n)$$

et

$$Z_5(m) = \Sigma Z_1(n) Z_3(2m - n),$$

n variant, sous le signe Σ, de 1 à $2m - 1$.

De la première de ces égalités, on déduit, par un raisonnement analogue au précédent, que le nombre $8m$ se décompose en une somme de huit carrés impairs de $Z_3(m)$ façons.

[O'5j]

SUR LES LIGNES ASYMPTOTIQUES DE CERTAINES SURFACES DE RÉVOLUTION;

PAR M. V. JAMET.

1. Dans un récent article sur les lignes asymptotiques [*Sur les surfaces dont les lignes asymptotiques se déterminent par des quadratures* (*N. A.*, septembre 1910)], M. Buhl constate que la recherche des lignes asymptotiques du tore dépend des fonctions elliptiques. Je dis qu'il en est de même pour toute surface de révolution dont la méridienne est une conique. Je suppose connue l'équation différentielle des lignes asymptotiques d'une surface sur laquelle les coordonnées homogènes X, Y, Z, T d'un point courant sont exprimées en fonction de deux paramètres u, v. D'autre part, si l'équation de la méridienne d'une surface de révolution, rapportée à son axe pris pour axe des z, et à une droite Or, perpendiculaire à Oz, tracée dans le plan du méridien, résulte de

l'élimination d'un paramètre u entre les deux équations

$$r = \frac{\varphi(u)}{\theta(u)}, \qquad z = \frac{f(u)}{\theta(u)},$$

on pourra représenter la surface par les équations

$$X = \varphi(u)\cos v, \qquad Y = \varphi(u)\sin v, \qquad Z = f(u), \qquad T = \theta(u),$$

et l'équation différentielle dont il a été question ci-dessus deviendra

$$\begin{vmatrix} \varphi''(u)\cos v\,du^2 - 2\varphi'(u)\sin v\,du\,dv - \varphi(u)\cos v\,dv^2 & \varphi'(u)\cos v & -\varphi(u)\sin v & \varphi(u)\cos v \\ \varphi''(u)\sin v\,du^2 + 2\varphi'(u)\cos v\,du\,dv - \varphi(u)\sin v\,dv^2 & \varphi'(u)\sin v & \varphi(u)\cos v & \varphi(u)\sin v \\ f''(u)\,du^2 & f'(u) & 0 & f(u) \\ \theta''(u)\,du^2 & \theta'(u) & 0 & \theta(u) \end{vmatrix} =$$

puis, après réduction,

$$\begin{vmatrix} \varphi''(u) & \varphi'(u) & \varphi(u) \\ f''(u) & f'(u) & f(u) \\ \theta''(u) & \theta'(u) & \theta(u) \end{vmatrix} du^2 - \varphi(u)[\theta(u)f'(u) - f(u)\theta'(u)]\,dv^2 = 0.$$

Dans le problème qui nous occupe, on peut remplacer les fonctions φ, f, θ, par trois trinomes du second degré, savoir :

$$\varphi = au^2 + 2bu + c,$$
$$f = a'u^2 + 2b'u + c',$$
$$\theta = \alpha u^2 + 2\beta u + \gamma,$$

et l'on constate que le déterminant qui figure dans cette dernière équation se réduit à une constante, égale à

$$4\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}.$$

Nous désignerons cette constante par Δ; nous écrirons l'équation différentielle qui précède sous la

forme

$$(1) \qquad \Delta\, du^2 - \varphi(\theta f' - f\theta')\, dv^2 = 0.$$

Observant alors que la fonction

$$\varphi(\theta f' - f\theta')$$

se réduit à un polynome entier du quatrième degré, nous en concluons que la fonction u, de la variable v, est une fonction elliptique de cette variable, et nous nous proposons de rechercher tout d'abord les cas particuliers où cette fonction dégénère en une transcendante plus élémentaire. Ces cas particuliers sont les suivants :

a. L'équation $\varphi = 0$ a une racine double.

b. L'équation $\theta f' - f\theta' = 0$ a une racine double.

c. Les deux équations $\varphi = 0$, $\theta f' - f\theta' = 0$ ont une racine commune.

Ces trois hypothèses s'interprètent géométriquement comme il suit :

a. La conique méridienne est tangente à l'axe de révolution.

b. Supposons tout d'abord que l'équation $\theta = 0$ ait deux racines distinctes, de telle sorte qu'on ait

$$\theta = (u - u_1)(u - u_2)$$

et déplaçons le plan des xy parallèlement à lui-même, de telle sorte qu'on ait aussi

$$\frac{f}{\theta} = \frac{A}{u - u_1} + \frac{B}{u - u_2}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} \theta f' - f\theta' &= -\theta^2 \left(\frac{A}{(u - u_1)^2} + \frac{B}{(u - u_2)^2} \right) \\ &= -[A(u - u_2)^2 + B(u - u_1)^2]. \end{aligned}$$

Pour que l'équation

$$\theta f' - f\theta' = 0$$

ait deux racines égales, il faudra qu'on ait

$$(Au_2 + Bu_1)^2 - (A + B)(Au_2^2 + Bu_1^2) = 0$$

ou bien

$$2AB(u_1 - u_2)^2 = 0.$$

Supposant $u_1 - u_2 \neq 0$, nous concluons que l'un des coefficients A ou B doit être nul, et par conséquent

$$\frac{f}{\theta} = \frac{A}{u - u_1}.$$

La méridienne est donc représentée par les équations paramétriques

$$r = \frac{au^2 + 2bu + c}{(u - u_1)(u - u_2)},$$

$$z = \frac{A}{u - u_1},$$

et l'on reconnaît *qu'elle a une asymptote perpendiculaire à l'axe de révolution.*

Si l'on avait supposé $u_1 = u_2$, on aurait trouvé

$$\theta f' - f\theta' = (u - u_1)[(u - u_1)f' - 2f].$$

Dans ce cas, les deux racines de l'équation considérée ne peuvent être égales que si f est divisible par $u - u_1$. Par une translation du plan des xy, on ramènerait alors l'expression de $\frac{f}{\theta}$ à la forme

$$\frac{A}{u - u_1},$$

et la conclusion serait la même que précédemment.

c. Dans ce cas particulier, la cote z maximum ou minimum d'un point de la méridienne est aussi la cote

d'un point commun à la méridienne et à l'axe de révolution. *L'axe de révolution est normal à la conique méridienne.*

2. Revenons maintenant à l'équation (1), et supposons que nous ayons effectué une substitution homographique permettant de remplacer le polynome biquadratique

$$\varphi(\theta f' - f\theta')$$

par un polynome du troisième degré, de telle sorte que l'équation transformée soit

$$(2) \qquad \Delta\, du^2 + G(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)\, dv^2 = 0.$$

ξ désignant la nouvelle variable, G, ξ_1, ξ_2, ξ_3, des constantes. On pourra exprimer ξ en fonction de v, au moyen d'une des deux formules suivantes, choisie à volonté :

$$(A) \qquad \xi = \xi_1 \operatorname{cn}^2\left(C \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{G(\xi_1 - \xi_2)}{\Delta}}\, v\right) - \xi_2 \operatorname{sn}^2\left(C \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{G(\xi_1 - \xi_3)}{\Delta}}\, v\right),$$

le module k des fonctions sn, cn, étant défini par l'équation

$$k^2 = \frac{\xi_1 - \xi_2}{\xi_1 - \xi_3},$$

ou bien

$$(B) \qquad \xi = p\left(C \pm \frac{i}{2}\sqrt{\frac{G}{\Delta}}\, v\right) + \frac{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3}{3},$$

la fonction p étant choisie de telle sorte que, si l'on appelle ses périodes 2ω et $2\omega'$, on ait

$$p\omega = \frac{2\xi_1 - \xi_2 - \xi_3}{3}, \qquad p\omega = \frac{2\xi_2 - \xi_1 - \xi_3}{3}.$$

Dans ces deux formules, la lettre C désigne une

constante arbitraire, et l'on peut les remplacer par des formules analogues obtenues en permutant de toutes les manières possibles ξ_1, ξ_2, ξ_3.

Mais je dis qu'on peut arriver à la forme (2), antérieurement à toute substitution, à condition de choisir convenablement la représentation paramétrique de la conique méridienne.

D'abord, si cette conique est une parabole, elle sera représentée par une équation de la forme

$$(\mathrm{M}r + \mathrm{N}z + \mathrm{P})^2 = \mathrm{Q}r + \mathrm{S}z + \mathrm{T},$$

et si l'on pose

$$\mathrm{Q}r + \mathrm{S}z + \mathrm{T} = u^2,$$
$$\mathrm{M}r + \mathrm{N}z + \mathrm{P} = u,$$

on exprimera r et z au moyen de deux trinomes du second degré en u; et l'on sera conduit simplement à faire $\theta = 1$ dans l'équation (1). On trouvera

$$2(ab' - a'b)\,du^2 - (au^2 + 2bu + c)(a'u + b')\,dv^2 = 0,$$

et la construction des formules analogues à (A) et (B), où ξ sera remplacé par u, n'offrira plus de difficulté.

Si la méridienne a un centre à distance finie, on fera passer l'axe des r par ce centre, et l'on ramènera son équation à la forme

$$(\mathrm{M}(r - r_0) + \mathrm{N}z)^2 + \mathrm{P}z^2 = 1,$$

ce qui conduit à faire

$$\mathrm{M}(r - r_0) + \mathrm{N}z = \sin t,$$
$$\mathrm{P}z = \cos t,$$

puis

$$t = 2 \operatorname{arc\,tang} u.$$

Les polynomes f et θ prennent alors la forme

$$f = c'(1 - u^2),$$
$$\theta = 1 + u^2$$

(c' désignant une constante), et l'équation différentielle des lignes asymptotiques prend une forme analogue à la forme (2), où ξ est remplacé par u. En effet, si l'on joint aux deux formules ci-dessus la formule

$$\varphi = au^2 + 2bu = c,$$

l'équation (1) devient

$$2bc'\,du^2 + c'(au^2 + 2bu + c)u\,dv^2 = 0.$$

On écrira cette dernière équation sous la forme

$$2b\,du^2 + a(u - u_1)(u - u_2)u\,dv^2 = 0$$

et l'on appliquera la formule (A), par exemple, en supposant

$$\xi_1 = u_1, \qquad \xi_2 = u_2, \qquad \xi_3 = 0.$$

On trouvera

$$u = u_1 \operatorname{cn}^2\left(C \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{au_1}{b}}\,v\right) + u_2 \operatorname{sn}^2\left(C \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{au_1}{b}}\,v\right)$$

avec

$$k^2 = \frac{u_1 - u_2}{u_1}$$

ou tout autre formule analogue obtenue en permutant d'une manière quelconque les trois racines u_1, u_2, 0. Si c'est, au contraire, la formule (B) qu'on veut appliquer, on trouvera

$$u = \wp\left(C \pm \frac{i}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\,v\right) + \frac{u_1 + u_2}{3}$$

ou bien

$$u = \wp\left(C \pm \frac{i}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\,v\right) - \frac{2b}{3a}$$

avec

$$\wp\omega = \frac{2u_1 - u_2}{3}, \qquad \wp\omega' = \frac{2u_2 - u_1}{3}.$$

[D2b]

NOTE SUR LES SÉRIES ALTERNÉES;

PAR M. G. VALIRON.

Considérons une série alternée

$$a_0 - a_1 + \ldots + (-1)^n a_n + \ldots$$

dont les termes décroissent en valeur absolue à partir d'un certain rang, et supposons que $\lim\limits_{n=\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$.

La condition nécessaire et suffisante pour que la série converge est que $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$. Écrivons alors

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \alpha_n \qquad (\alpha_n > 0 \text{ d'après ce qui précède}).$$

La série alternée converge ou diverge suivant que la série dont le terme général est α_n diverge ou converge.

En effet, on a

$$a_{n+p} = \frac{a_n}{(1+\alpha_n)(1+\alpha_{n+1})\ldots(1+\alpha_{n+p-1})},$$

d'où

$$a_{n+p} < \frac{a_n}{1+(\alpha_n+\alpha_{n+1}+\ldots+\alpha_{n+p-1})}$$

et par conséquent, si $\Sigma\alpha_n$ diverge, le dénominateur croît indéfiniment a_{n+p} tend vers zéro.

De même, on peut écrire

$$a_{n+p} = a_n\left(1 - \frac{\alpha_n}{1+\alpha_n}\right)\cdots\left(1 - \frac{\alpha_{n+p-1}}{1+\alpha_{n+p-1}}\right)$$
$$> a_n\left[1 - \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_n+1} + \ldots + \frac{\alpha_{n+p-1}}{1+\alpha_{n+p-1}}\right)\right]$$

Si la série α_n converge, la série $\frac{\alpha_n}{1+\alpha_n}$ converge *a fortiori* et par conséquent on peut trouver n assez grand pour que

$$\frac{\alpha_n}{1+\alpha_n}+\ldots+\frac{\alpha_{n+p-1}}{1+\alpha_{n+p-1}}<\varepsilon,$$

quel que soit p, et ε étant arbitrairement petit. Il suit de là

$$a_{n+p}>a_n(1-\varepsilon),$$

quel que soit p. a_{n+p} ne tend pas vers zéro, la série diverge.

Le théorème est donc démontré.

Cas particuliers. — Si l'on a

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\lambda(1-\varepsilon_n)}{n}\qquad\left(\lim_{n=\infty}\varepsilon_n=0,\ \lambda>0\right),$$

la série converge (elle est absolument convergente pour $\lambda>1$ d'après la règle de Duhamel, et diverge pour $\lambda<0$).

Si

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\lambda(1-\varepsilon_n)}{n(\log n)^{1+\alpha}}\qquad\left(\lim_{n=\infty}\varepsilon_n=0,\ \lambda>0\right),$$

la série converge pour $0<\alpha\leqq 1$ (non absolument) et diverge pour $\alpha>1$, etc.

[D2aα]

NOTE SUR LA RÈGLE DE DUHAMEL;

PAR M. G. VALIRON.

1. Considérons une série à termes positifs dans laquelle le rapport d'un terme au précédent a pour

limite un, et posons

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \alpha_n.$$

La quantité α_n a pour limite zéro lorsque n croît indéfiniment. Nous aurons

$$u_n = \frac{u_{n_0}}{(1+\alpha_{n_0})\ldots(1+\alpha_n)},$$

et l'on voit que si la série $\Sigma|\alpha_n|$ converge, le produit qui est un dénominateur reste fini, u_n ne tend pas vers zéro, la série u_n est divergente.

Supposons donc que la série $\Sigma|\alpha_n|$ diverge, mais que la série $\Sigma\alpha_n^2$ converge ; nous pourrons écrire en posant $e(x) = e^x$

$$u_n = \frac{u_{n_0}}{e\left(\sum_{n_0}^{n} \alpha_n\right) \prod_{n_0}^{n} (1+\alpha_n)\, e^{-\alpha_n}}.$$

L'hypothèse faite sur $\Sigma\alpha_n^2$ entraîne la convergence du produit infini qui est en dénominateur et par suite les séries de termes généraux u_n et $e\left(-\sum_{n_0}^{n} \alpha_n\right)$ convergent ou divergent en même temps. Si l'on remarque que la série $e\left(-\sum_{n_0}^{n} \alpha_n\right)$ diverge lorsque la série $\Sigma|\alpha_n|$ converge (puisque le terme général reste fini), on a le résultat suivant :

La série u_n converge ou diverge suivant que la série $v_n = e\left(-\sum_{n_0}^{n} \alpha_n\right)$ converge ou diverge (toutes les fois que la série $\Sigma\alpha_n^2$ converge).

2. Supposons en particulier toutes les quantités α_n

positives, et décroissantes, et soit $\alpha(x)$ une fonction continue décroissante égale à α_n pour $x = n$. On sait qu'on a

$$\sum_{n_0+1}^{n} \alpha_n < \int_{n_0}^{n} \alpha(x)\,dx < \sum_{n_0}^{n-1} \alpha_n,$$

et, par conséquent, en posant $w_n = e\left(-\int_{n_0}^{n} \alpha(x)\,dx\right)$,

$$v_{n-1} < w_n < v_n\, e^{\alpha_{n_0}},$$

ce qui montre que les séries de termes w_n et v_n convergent ou divergent en même temps, donc aussi les séries w_n et v_n.

On a ainsi la proposition suivante :

En supposant que la série $\Sigma\alpha_n^2$ soit convergente, la série u_n converge ou diverge suivant que la série de terme général $w_n = e\left(-\int_{n_0}^{n} \alpha(x)\,dx\right)$ converge ou diverge.

On retrouve ainsi la règle de Duhamel et les critères de deuxième espèce de Bertrand.

1° Si $\alpha_n = \frac{k}{n}$, on aura

$$w_n = \frac{A}{n^k};$$

la série u_n converge si $k > 1$, diverge si $k \leqq 1$. *A fortiori*, si $n\alpha_n > k > 1$, la série converge et diverge si $n\alpha_n \leqq 1$.

2° Prenons

$$\alpha_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n \log n} + \ldots + \frac{k}{n \log n \ldots (\log_p n)},$$

on aura

$$w_n = \frac{A}{n(\log n)\ldots(\log_p n)^k},$$

série qui converge pour $k > 1$, diverge pour $k \leqq 1$. On obtient les critères de Bertrand.

3° Le résultat du n° 1 montre que si l'on a

$$\alpha_n = \frac{1 + \beta_n}{n},$$

la série u_n diverge si la série $\sum \frac{\beta_n}{n}$ converge.

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Montpellier.

Épreuve écrite. — 1° *Déterminer l'intégrale générale de l'équation*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \sin ax,$$

où

$$a^2 - 4 \gtrless 0;$$

2° *En considérant cette intégrale comme l'équation d'une courbe, déterminer les constantes arbitraires de façon que la courbe passe par l'origine et soit tangente à l'axe* OX *en* O;

3° *En supposant* $a = 1$, *et* x *compris entre* 0 *et* π, *étudier la forme de la courbe; montrer qu'elle a un point d'inflexion. Calculer l'aire comprise entre cette courbe et* OX;

4° *Que devient l'intégrale générale de l'équation donnée, si* $a = 2$?

Épreuve pratique. — *Une courbe est représentée, en coordonnées polaires, par l'équation*

$$\rho = a(1 + \cos\omega).$$

Déterminer le centre de gravité de l'arc obtenu en faisant varier ω *de* 0 *à* π. (Novembre 1909.)

Nancy.

Analyse. — I. *Exposer la méthode de la variation des constantes pour l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre, en prenant comme exemple*

l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cot^2 x.$$

II. *Dans un système d'axes rectangulaires* Ox, Oy, *on considère une courbe* C; *on désigne par* M *un point quelconque de cette courbe, par* P *sa projection sur* Ox *et par* N *le point de rencontre avec* Ox *de la normale à la courbe au point* M. *Déterminer la courbe* C *par la condition que la somme des deux longueurs* MN *et* MP *soit égale à une longueur donnée* $2a$. *Construire la courbe* C.

Géométrie et Mécanique. — *On donne un cône de révolution ayant pour sommet l'origine* O *des coordonnées, pour axe l'axe des* z *et pour demi-angle au sommet un angle égal à* $\frac{\pi}{2} - \alpha$. *On trace sur ce cône une courbe* C *définie par une relation entre les coordonnées polaires de sa projection sur le plan des* xy.

1° *Déterminer cette relation par la condition que la tangente à la courbe* C *en chacun de ses points* M *fasse un angle constant* V *avec le rayon du parallèle du cône passant par ce point;*

2° *Montrer que la tangente à la courbe* C *au point* M *fait un angle constant avec l'axe des* z *et calculer l'arc de la courbe* C;

3° *Un point matériel est assujetti à se déplacer sur cette courbe en restant soumis à l'action d'une seule force attractive, perpendiculaire à l'axe* Oz *et inversement proportionnelle à la distance du point à cet axe; calculer le travail de cette force lorsque le plan passant par l'axe des* z *et le point a tourné d'un angle donné.*

(Juin 1909.)

Analyse. — I. *Étant donnée l'intégrale curviligne*

$$\int P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy,$$

énoncer et démontrer la condition nécessaire et suffisante pour que cette intégrale ne dépende que des deux extrémités du contour d'intégration et pour que l'expression

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

soit une différentielle totale exacte.

II. *Étant donnée une courbe rapportée à deux axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, *former l'équation différentielle exprimant que l'angle fait avec* Ox *par la tangente en un point quelconque* M *est le triple de l'angle fait avec* Ox *par le rayon vecteur* OM.

Intégrer cette équation différentielle et construire les courbes intégrales.

Géométrie et Mécanique. — *On considère la surface réglée représentée par les équations*

$$x = (a + z)\cos t, \qquad y = (a - z)\sin t,$$

où a *est une constante et* t *un paramètre variable.*

1° *Trouver sur la surface le lieu des points où le plan tangent est parallèle à* Oz.

2° *Un point mobile sur la surface est soumis à une force représentée à chaque instant par un vecteur dirigé suivant la génératrice passant par ce point et ayant pour projection sur l'axe des* z *l'expression* $z + f(t)$, $f(t)$ *étant une fonction de la seule variable* t.

Déterminer la fonction $f(t)$ *de telle sorte que le travail de la force pour un déplacement quelconque du point sur la surface ne dépende que de l'origine et de l'extrémité de ce déplacement et évaluer ce travail.*

(Octobre 1909.)

Poitiers.

Épreuve théorique. — *On considère deux courbes* C *et* C′ *dont les équations, en coordonnées rectangulaires, sont :*

$$(c) \qquad x^3y^2 - x + 1 = 0;$$

$$(c') \qquad x^5y^4 - x + 1 = 0.$$

1° *Construire ces courbes. Déterminer les points en lesquels les tangentes sont parallèles aux axes de coordonnées, les points d'inflexion et les tangentes en ces points.*

2° *Démontrer qu'une hyperbole asymptote aux deux axes de coordonnées coupe toujours chacune des courbes* C *et* C′ *en un seul point. En déduire qu'on peut exprimer rationnellement en fonction d'un paramètre les coordonnées des points de* C *et de* C′.

3° *Chacune des deux courbes* C *et* C′ *partage en deux*

régions le demi-plan $x > 0$ et le quadrant $x < 0$, $y > 0$. Dire si ces régions ont ou non des aires finies; calculer celles de ces aires qui sont finies.

Un arc de la courbe C *et la corde de cette courbe qui joint les points de contact des tangentes parallèles à* Ox *limite une aire finie* S. *Calculer cette aire et l'aire analogue* S'.

Montrer que ces questions peuvent être traitées soit en se servant des équations cartésiennes, soit en se servant des expressions paramétriques des coordonnées de C *et de* C'.

4° *Former l'équation différentielle qui admet pour courbes intégrales celles qui ont pour équation*

$$x(xy)^{\lambda} - x + 1 = 0,$$

λ *étant un paramètre.*

Cette équation différentielle étant donnée, comment l'intégrerait-on? Y a-t-il des intégrales singulières?

Épreuve pratique. — I. *Combien l'équation*

$$2x^3 - 3x^2 - 12x + 2 = 0$$

a-t-elle de racines réelles? Calculez à $\frac{1}{10}$ *près la plus grande de ces racines.*

II. *Un point pesant se déplace sans frottement sur la parabole dont l'équation est* $x^2 = 2y$, *les axes étant rectangulaires, l'axe des* y *étant vertical et dirigé vers le haut.*

Calculer la durée des oscillations du point, sachant qu'on l'a abandonné sans vitesse initiale en l'un des deux points de la parabole qui sont dans le même plan horizontal que le foyer. (Juillet 1908.)

Épreuve théorique. — 1° *Construire la courbe* C, *donnée en coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$x(x^2 + y^2) = x^2 - y^2;$$

2° *Quel que soit* m, *la droite issue de l'origine et faisant avec* Ox *un angle dont la tangente est égale à* m *rencontre* C *en un seul point en dehors de l'origine* O. *Exprimer les coordonnées de ce point en fonction de* m *et former l'équation de la tangente en ce point;*

3° *Combien passe-t-il de tangentes réelles à la courbe* C *par un point donné* (α, β) *du plan* xOy. *Partager le plan en régions d'après le nombre de tangentes passant par les points de chaque région;*

4° *Calculer l'aire de la région dans laquelle ne passe aucune tangente à* C;

5° *Soit* M *un point de* C, *trouver l'enveloppe de la perpendiculaire* MN *à* OM, *quand* M *parcourt* C;

6° Oy *étant vertical et dirigé vers le haut, étudier le mouvement d'un point pesant* M *glissant sans frottement sur la courbe* C.

On supposera qu'au temps $t = 0$ *le point* M *est à l'origine sans vitesse initiale et l'on examinera ce qui se passe suivant que* M *est placé sur l'une ou l'autre des deux branches de* C *passant en* O.

Épreuve pratique. — I. 1° *Déterminer l'intégrale générale de l'équation*

$$y''' - y'' - y' + y = e^{\alpha x}. \tag{1}$$

Cette forme de l'intégrale générale convient-elle au cas où $\alpha = 1$?

2° *En supposant* $\alpha \neq \pm 1$, *déterminer celle des intégrales de l'équation* (1) *qui s'annule ainsi que ses deux premières dérivées pour* $x = 0$.

3° *Vers quelle limite tend cette intégrale quand* α *tend vers* 1? *Vérifier que cette limite satisfait à l'équation*

$$y''' - y'' - y' + y = e^{x}. \tag{2}$$

En déduire l'intégrale générale de cette équation.

4° *Déterminer par analogie l'intégrale générale de l'équation*

$$y''' - y'' - y' + y = x^2 e^{x}. \tag{3}$$

II. *Déterminer les fonctions* $z(x, y)$ *satisfaisant à l'équation*

$$x\frac{\partial z}{\partial x} = y + z + \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Vérifier que les surfaces $z = z(x, y)$ *définies à l'aide de ces fonctions sont engendrées par des droites parallèles au plan des* xz *et rencontrant une droite fixe.*

(Novembre 1908.)

[D4b]

LE THÉORÈME DE M. PICARD POUR LES FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE NUL;

PAR M. G. VALIRON.

Considérons une fonction entière d'ordre nul $f(z)$, le fait que $|f(z)|$ croît indéfiniment sur certains cercles [théorème de M. Wiman (1)], a conduit M. Mattson (2) à penser que, si l'on prend la fonction $f(z)+a$, a étant une constante, le *rapport des nombres des zéros des deux fonctions, contenus dans un cercle de rayon r, tend vers un, lorsque r croît indéfiniment.* Dans mon Mémoire des *Mathematische Annalen* j'avais indiqué la fonction

$$f(z)=\prod_1^\infty\left\{1-\frac{z}{e_2\left[\left(\frac{3}{2}\right)^p\right]}\right\}^{E\left(\frac{3}{2}\right)^p},$$

[où $E(x)$ désigne la partie entière du nombre x], comme échappant à la proposition précédente. Je vais considérer ici la fonction

$$F(z)=\prod_1^\infty\left(1-\frac{z}{e^{2^p}}\right)^{2^p}, \tag{1}$$

qui donne des résultats plus nets.

1. Je vais d'abord calculer une valeur approchée

(1) *Voir* mon Mémoire : *Sur les fonctions entières d'ordre nul* (*Mathematische Annalen*, B. 70).

(2) *Voir* RUBEN MATTSON, Thèse, Upsal, 1905, p. 47.

de $F(z)$ pour r voisin de e^{2^p}. Soit

$$z = e^{2^p} h e^{i\theta},$$

où h vérifie l'inégalité

$$\frac{1}{2} < h < 2,$$

et où θ est l'argument de z. On peut écrire

$$(2) \qquad F(z) = A.B.C(1 - h e^{i\theta})^{2^p},$$

en posant

$$A = \frac{z^{\sum_1^{p-1} 2^p}}{e^{\sum_1^{p-1} 4^p}}, \qquad B = \prod_1^{p-1}\left(1 - \frac{e^{2^q}}{h e^{i\theta} e^{2^p}}\right)^{2^q},$$

$$C = \prod_{p+1}^{\infty}\left(1 - \frac{h e^{i\theta} e^{2^p}}{e^{2^r}}\right)^{2^r}.$$

On a immédiatement

$$A = \frac{e^{2^p(2^p-2)} h^{2^p-2} e^{i\theta(2^p-2)}}{e^{\frac{4^p-4}{3}}},$$

ou

$$(3) \qquad A = e^{\frac{2}{3}4^p - 2.2^p + \frac{4}{3}} h^{2^p-2} e^{i\theta(2^p-2)}.$$

Calculons une valeur approchée de B. On a

$$\log B = \sum_1^{p-1} 2^q \log\left(1 - \frac{e^{2^q}}{h e^{i\theta} e^{2^p}}\right).$$

Mais

$$\log\left(1 - \frac{e^{2^q}}{h e^{i\theta} e^{2^p}}\right) = -\frac{e^{2^q}}{h e^{i\theta} e^{2^p}}(1 + \alpha_q),$$

où α_q est un nombre ayant pour limite zéro pour p

infini. Il vient donc

$$\log B = -\frac{1+\alpha}{he^{i\theta}e^{2^p}}\sum_1^{p-1} 2^q e^{2^q}, \qquad \lim_{p=\infty} \alpha = 0.$$

Or

$$\sum_1^{p-1} 2^q e^{2^q} < e^{2^{p-1}} \sum_1^{p-1} 2^q < e^{2^{p-1}} 2^p,$$

de sorte que

$$(4) \qquad |\log B| < \frac{(1+\alpha)e^{2^{p-1}}2^p}{he^{2^p}} < \eta,$$

quelque petit que soit η, pourvu que p soit assez grand. De même on aura

$$\log C = \sum_{p+1}^{\infty} 2^r \log\left(1 - \frac{he^{i\theta}e^{2^p}}{e^{2^r}}\right) = -(1+\alpha)he^{i\theta}e^{2^p}\sum_{p+1}^{\infty}\frac{2^r}{e^{2^r}};$$

or

$$\sum_{p+1}^{\infty}\frac{2^r}{e^{2^r}} < \frac{2^{p+1}}{e^{2^{p+1}}}(1+k),$$

où k est très petit, car le rapport d'un terme au précédent dans $\sum_{p+1}^{\infty}$ est très petit.

On obtient donc encore ici

$$(5) \qquad |\log C| < (1+\alpha)he^{2^p}\frac{2^{p+1}}{e^{2^{p+1}}}(1+k) < \eta'.$$

η' étant arbitrairement petit, et p suffisamment grand. Les inégalités (4) et (5) donnent

$$B.C = (1+\varepsilon),$$

ε étant un nombre complexe tendant vers zéro avec $\frac{1}{p}$.

En portant cette valeur et celle de A dans l'expres-

sion (2), on aura

$$(6)\quad F(z) = (1+z)e^{\frac{2}{3}4^p - 2.2^p + \frac{4}{3}} h^{2^p-2} e^{i\theta(2^p-2)} (1 - he^{i\theta})^{2^p},$$

égalité valable pour $\frac{1}{2} < h < 2$ (et même dans de beaucoup plus larges limites).

2. Soit alors l'équation

$$(7)\qquad F(z) - ae^{i\omega} = 0.$$

Il résulte tout d'abord de l'égalité (6) que les deux fonctions $F(z)$ et $F(z) - ae^{i\omega}$ ont le même nombre de zéros dans les cercles de rayons

$$\frac{e^{2^p}}{2} \quad \text{et} \quad 2e^{2^p}.$$

En effet, la différence des nombres des zéros des deux fonctions contenus dans le cercle de rayon r est

$$n_0 - n_a = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_c d\{\log[F(z)]\} - \int_c d\{\log[F(z) - ae^{i\omega}]\}\right),$$

$\int_c$ désignant l'intégrale prise le long du cercle de rayon r; or l'expression précédente s'écrit

$$n_0 - n_a = \frac{1}{2\pi i} - \int_c d\left\{\log\left[1 - \frac{ae^{i\omega}}{F(z)}\right]\right\};$$

pour $r = \frac{e^{2^p}}{2}$ l'égalité (6) montre que

$$|F(z)| > e^{\frac{2}{3}4^p(1-\varepsilon_1)};$$

donc

$$\left|\frac{ae^{i\omega}}{F(z)}\right| < 1,$$

pourvu que p soit assez grand, c'est-à-dire qu'on a

$$n_0 = n_a.$$

On aura le résultat analogue pour le cercle de rayon $2e^{2^p}$.

Comme conséquence on voit que l'équation (7) a 2^p racines comprises entre les deux cercles considérés.

Nous allons calculer des valeurs approchées de ces racines.

3. En remplaçant dans (7) $F(z)$ par l'expression (6), nous aurons

$$(1+\varepsilon)e^{\frac{2}{3}4^p-2.2^p+\frac{4}{3}}h^{2^p-2}e^{i\theta(2^p-2)}(1-he^{i\theta})^{2^p}=ae^{i\omega},$$

ou encore, ε' tendant vers zéro avec $\frac{1}{p}$,

$$e^{\frac{2}{3}4^p(1-\varepsilon')}e^{i\theta(2^p-2)}(1-he^{i\theta})^{2^p}=ae^{i\omega},$$

et par suite

$$(1-he^{i\theta})^{2^p}=\frac{ae^{i[\omega-\theta(2^p-2)]}}{e^{\frac{2}{3}4^p(1-\varepsilon')}},$$

d'où

$$(8)\qquad 1-he^{i\theta}=\frac{a^{\frac{1}{2^p}}}{e^{\frac{2}{3}2^p(1-\varepsilon')}}e^{i\left(\frac{\omega}{2^p}-\theta+\frac{\theta}{2^{p-1}}\right)}e^{i\frac{2k\pi}{2^p}},$$

avec $k=(0, 1, 2, \ldots, 2^p-1)$.

Il résulte de cette égalité que θ est d'ordre inférieur à $\frac{a^{\frac{1}{2^p}}}{e^{\frac{2}{3}2^p(1-\varepsilon')}}$, et que nous aurons en première approximation 2^p valeurs pour $he^{i\theta}$,

$$h_k e^{i\theta_k}=1-\frac{a^{\frac{1}{2^p}}}{e^{\frac{2}{3}2^p(1-\varepsilon')}}e^{i\frac{2k\pi}{2^p}}.$$

Les racines correspondantes de l'équation (7) sont

$$z_k=e^{2^p}h_k e^{i\theta_k}$$

Par suite :

Les 2^p racines de l'équation (7) *comprises entre les cercles de rayons* $\frac{e^{2^p}}{2}$ et $2e^{2^p}$ *ont sensiblement pour points représentatifs les sommets d'un polygone régulier ayant pour centre le point* e^{2^p} *et pour rayon* $e^{\frac{2^p}{3}(1-\varepsilon')}$.

Prenons alors le rapport des nombres des zéros des fonctions $F(z)$ et $F(z) - ae^{i\omega}$, ce rapport est égal à *un* pour le cercle de rayon

$$e^{2^p} - e^{\frac{2^p}{3}(1-\varepsilon')},$$

puis il va en décroissant jusqu'à une valeur voisine de $\frac{2}{3}$ pour le cercle $e^{2^p} - \varepsilon$, il saute à la valeur $\frac{3}{2}$ pour $e^{2^p} + \varepsilon$, puis décroît jusqu'à *un* pour le cercle

$$e^{2^p} + e^{\frac{2^p}{3}(1-\varepsilon')}.$$

Ce rapport n'a donc pas de limite.

Il importe de remarquer que, pour les deux fonctions

$$F(z) + a_1, \qquad F(z) + a_2,$$

le rapport en question aura bien pour limite *un*, quels que soient les nombres a_1 et a_2 différents de zéro, parmi les fonctions $F(z) + a$ une seule présente donc un cas d'exception.

4. La démonstration précédente met aussi en évidence l'inexactitude d'une proposition de M. Zöllich [1],

---

[1] Zöllich, *Beiträge zur Theorie der ganzen transzendenten Funktionen der Ordnung Null* (*Inaugural Dissertation*, Halle, 1908).

d'après laquelle les *zéros des fonctions* $f(z)+a$, $f(z)$ *étant une fonction entière d'ordre nul, sont situés à l'intérieur de cercles ayant pour centre les zéros de* $f(z)$ *et dont les rayons sont de l'ordre de l'inverse des modules des zéros.*

En terminant je remarquerai que la fonction $f(z)$, qui est certainement très spéciale, est pourtant *très régulière* puisque r_n étant le $n^{\text{ième}}$ zéro, on a

$$r_n = e^{hn},$$

avec

$$\frac{1-\varepsilon}{2} < h < 2(1+\varepsilon).$$

[C1a]

NOTE SUR LES DÉTERMINANTS DE WRONSKY;

PAR M. G. VALIRON.

Désignons par la notation

$$F_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

le déterminant de Wronski relatif aux fonctions y_1, $y_2, \ldots, y_n$,

$$F_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) \equiv \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

On sait qu'étant donné un déterminant D de degré n, si l'on désigne par $D\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ n-1 & n \end{pmatrix}$ le déterminant obtenu en supprimant les colonnes de rang 1 et 2, et les lignes de rang $n-1$ et n, et par $\Delta\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ n-1 & n \end{pmatrix}$ le déterminant

obtenu en prenant les termes de la $n^{\text{ième}}$ et de la $(n-1)^{\text{ième}}$, ligne et ceux de la première et deuxième colonnes du déterminant adjoint, on a la relation

$$\Delta\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ n-1 & n \end{pmatrix} = -D \times D\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ n-1 & n \end{pmatrix}.$$

Prenons

$$D = F_n(y_1, y_2, \ldots, y_n);$$

on aura

$$D\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ n-1 & n \end{pmatrix} = F_{n-2}(y_3, \ldots, y_n)$$

et

$$\Delta\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ n-1 & n \end{pmatrix}$$
$$= -F_2[F_{n-1}(y_2, y_3, \ldots, y_n), F_{n-1}(y_1, y_3, \ldots, y_n)],$$

comme on le constate aisément [le mineur de y_1^{n-2} dans F_n est égal à la dérivée de $F_{n-1}(y_2, \ldots, y_n)$].

On obtient ainsi la relation

$$F_2[F_{n-1}(y_2, y_3, \ldots, y_n), F_{n-1}(y_1, y_3, \ldots, y_n)]$$
$$= F_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) F_{n-2}(y_3, \ldots, y_n),$$

qui s'écrit encore en supposant que la fonction

$$F_{n-2}(y_3, \ldots, y_n)$$

n'est pas identiquement nulle,

$$F_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$
$$= \frac{[F_{n-1}(y_1, y_3, \ldots, y_n)]^2}{F_{n-2}(y_3, \ldots, y_n)} \frac{d}{dx}\left[\frac{F_{n-1}(y_2, \ldots, y_n)}{F_{n-1}(y_1, y_3, \ldots, y_n)}\right].$$

C'est cette relation que je voulais établir. On peut en déduire que lorsque $F_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ est identiquement nul il existe entre les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ une relation linéaire et homogène à coefficients constants. Car, en supposant $F_{n-1}(y_1, y_3, \ldots, y_n)$ non iden-

tiquement nul, on aura

$$\frac{F_{n-1}(y_2, \ldots, y_n)}{F_{n-1}(y_1, y_3, \ldots, y_n)} \equiv C_1,$$

d'où

$$F_{n-1}[(y_2 - C_1 y_1), y_3, \ldots, y_n] \equiv 0,$$

et ainsi de suite.

[O¹51, O¹6h]

SUR LES LIGNES GÉODÉSIQUES ET LES SURFACES MINIMA;

PAR M. M. FOUCHÉ.

Je me propose d'indiquer un procédé de démonstration qui donne très rapidement et d'une manière analogue la condition pour qu'une ligne tracée sur une surface ait le minimum de longueur entre deux points, ou pour qu'une surface ait une aire minimum à l'intérieur d'un contour fermé. Ce procédé repose sur l'emploi des formules de Codazzi, et fournit en même temps la démonstration d'un théorème qui paraît présenter quelque importance.

I. *Lignes géodésiques.* — Je suppose la surface rapportée à un réseau rectangulaire, l'élément linéaire étant

$$ds^2 = A^2\,du^2 + B^2\,dv^2.$$

La longueur d'une ligne allant du point $u_0 v_0$ au point $u_1 v_1$ est donnée par l'intégrale

$$\int_{u_0}^{u_1} \sqrt{A^2\,du^2 + B^2\,dv^2},$$

où v est une fonction de u, qui prend la valeur v_0 pour $u = u_0$ et la valeur v_1 pour $u = u_1$.

On peut encore écrire cette intégrale

$$\int_{u_0}^{u_1} \sqrt{A^2 + B^2 v'^2}\, du,$$

en désignant par v' la dérivée de v par rapport à u.

Si l'on change la fonction v, la variation de l'élément de l'intégrale sera

$$\frac{A \dfrac{\partial A}{\partial v} + B \dfrac{\partial B}{\partial v} v'^2 + B^2 v' \dfrac{\delta v'}{\delta v}}{\sqrt{A^2 + B^2 v'^2}} \delta v\, du.$$

Pour trouver la ligne minimum, il faut trouver une fonction de v pour laquelle cette variation soit nulle, et qui prenne les valeurs v_0 et v_1 respectivement pour $u = u_0$ et $u = u_1$.

Cherchons la condition pour que la ligne $v =$ const. soit minimum. Alors $v_0 = v_1$; mais il faut que la variation soit nulle. Comme $v' = 0$, il faut qu'on ait

$$A \frac{\partial A}{\partial v} = 0,$$

et, puisque A ne peut être nul,

$$\frac{\partial A}{\partial v} = 0.$$

A ne doit être fonction que de u, et l'on obtient ainsi un résultat bien connu.

D'autre part, l'une des formules de Codazzi donne

$$\frac{\partial A}{\partial v} = -rB,$$

et puisque B ne peut être nul, il faut que $r = 0$; ce qui veut dire que quand u varie seule, le trièdre mobile

ne tourne pas autour de la normale à la surface. L'axe instantané de ce trièdre est donc dans le plan tangent à la surface. Mais le plan osculateur à la courbe où u varie seule est perpendiculaire au plan passant par la tangente et l'axe de rotation. Il est donc perpendiculaire au plan tangent. Finalement, le plan osculateur d'une ligne géodésique est normal à la surface. C. Q. F. D.

II. *Surfaces minima.* — Toute surface peut faire partie d'un système triple orthogonal, et cela d'une infinité de manières. Il suffit de lui adjoindre par exemple ses surfaces parallèles et ses normalies développables.

Si l'on rapporte tous les points de l'espace à un réseau formé de surfaces triplement orthogonales, l'élément linéaire de l'espace prend la forme

$$ds^2 = A^2\,du^2 + B^2\,dv^2 + C^2\,dw^2,$$

où du, dv, dw désignent les éléments d'arc des normales aux trois surfaces.

Une surface quelconque sera définie si l'on donne w en fonction de u et de v.

Si l'on considère trois axes Ox, Oy, Oz coïncidant au point considéré avec les trois normales, on aura

$$dx = A\,du, \qquad dy = B\,dv, \qquad dz = C\,dw,$$

et le plan tangent à la surface sera défini par le système d'équations

$$\frac{X - x}{A\,du} = \frac{Y - y}{B\,dv} = \frac{Z - z}{C\,dw},$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u}\,du + \frac{\partial w}{\partial v}\,dv$$

ou

$$\frac{Z - z}{C} = \frac{\partial w}{\partial u}\,\frac{X - x}{A} + \frac{\partial w}{\partial v}\,\frac{Y - y}{B},$$

ou encore

$$BC\frac{\partial w}{\partial u}(X-x)+CA\frac{\partial w}{\partial v}(Y-y)-AB(Z-z)=0.$$

Le cosinus de l'angle que fait ce plan avec le plan xOy sera donc

$$\frac{AB}{\sqrt{B^2C^2\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+C^2A^2\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2+A^2B^2}}.$$

Alors l'élément de surface correspondant aux variations du et dv des paramètres u et v se projettera sur le plan xOy suivant un rectangle ayant pour aire

$$AB\,du\,dv,$$

et cet élément lui-même aura pour valeur

$$\sqrt{B^2C^2\left(\frac{dw}{du}\right)^2+C^2A^2\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2+A^2B^2}\,du\,dv.$$

L'aire comprise à l'intérieur d'un contour (C) sera

$$\int\int_{(C)}\sqrt{B^2C^2\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+C^2A^2\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2+A^2B^2}\,du\,dv.$$

Pour avoir l'aire minimum à l'intérieur du contour (C), il faudra trouver une fonction w de u et v ayant en chaque point de ce contour une valeur bien déterminée et telle que la variation de l'intégrale soit nulle. Or cette variation a pour expression, en se bornant à l'élément de l'intégrale

$$\frac{AB\left(A\frac{\partial B}{\partial w}+B\frac{\partial A}{\partial w}\right)\delta w}{\sqrt{A^2B^2+\ldots}}\ldots$$

plus des termes qui contiennent tous une des dérivées de w.

Si donc on veut que la surface où w est constante soit minimum, il faudra que la partie écrite plus haut soit nulle, ce qui donne, puisque ni A ni B ne peuvent être nuls,

$$A\frac{\partial B}{\partial w} + B\frac{\partial A}{\partial w} = 0.$$

Si l'on désigne les rotations du trièdre par p, q, r; p_1, q_1, r_1; p_2, q_2, r_2, suivant que la seule variable est u, v ou w, les formules de Codazzi

$$\frac{\partial A}{\partial v} = -rB, \qquad \frac{\partial B}{\partial u} = r_1 A$$

donnent par permutation tournante

$$\frac{\partial B}{\partial w} = -p_1 C, \qquad \frac{\partial A}{\partial w} = qC,$$

et l'équation précédente devient, en supprimant le facteur commun C :

$$p_1 A - qB = 0$$

ou

$$\frac{A}{q} - \frac{B}{p_1} = 0,$$

ce qui exprime que les deux rayons de courbure principaux ont la même valeur absolue, mais des signes contraires. C'est la propriété caractéristique bien connue des surfaces minima.

Si l'équation

$$A\frac{\partial B}{\partial w} + B\frac{\partial A}{\partial w} = 0$$

est vérifiée non seulement pour la valeur initiale de w, mais pour toute valeur de cette variable, c'est que le produit AB est indépendant de w. Alors toutes les surfaces de la première famille sont des surfaces minima.

Considérons sur l'une d'elles un contour fermé quelconque (C). Par chacun des points de (C) faisons passer la trajectoire orthogonale des surfaces minima; toutes ces trajectoires orthogonales forment une surface normale aux surfaces minima, et qui découpe sur chacune d'elles une aire constante puisque l'expression de cette aire

$$\int\int_{(C)} AB\,du\,dv$$

est indépendante de w.

Cette conclusion ne s'applique pas seulement aux surfaces minima faisant partie d'un système triplement orthogonal : elle s'applique également à une suite quelconque de surfaces minima et à leurs trajectoires orthogonales. Dans le langage de la Mécanique on dira que :

Si les surfaces de niveau sont des surfaces minima, un tube de force quelconque découpe des aires égales sur toutes ces surfaces.

Pour le démontrer, il suffit de reprendre le raisonnement précédent avec des coordonnées obliques. Soient w le paramètre définissant chacune des surfaces minima, u et v deux variables définissant sur l'une d'elles un réseau quelconque. Par chaque courbe de ce réseau on peut faire passer une surface orthogonale à toutes les surfaces minima, et l'on a ainsi un système de trois familles de surfaces correspondant aux variables u, v, w. Les courbes définies, pour une valeur particulière de w, par la variation de u seule ou de v seule, font entre elles un angle θ qui dépend des valeurs des trois variables au point d'intersection ; mais les courbes où w varie seule sont les trajectoires ortho-

gonales des surfaces minima. L'élément linéaire de l'espace peut alors se mettre sous la forme

$$ds^2 = A^2 du^2 + 2E\, du\, dv + B^2 dv^2 + C^2 dw.$$

En raisonnant comme précédemment, on verra que le cosinus de l'angle du plan tangent à une surface quelconque avec le plan tangent à la surface $w =$ const. sera

$$\frac{AB}{\sqrt{A^2B^2 + B^2C^2\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + C^2A^2\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 + 2ABC^2\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial v}{\partial w}\cos\theta}}.$$

L'élément de surface dw s'obtiendra en multipliant sa projection

$$AB \sin\theta\, du\, dv$$

par l'inverse de ce cosinus, ce qui donnera

$$dw = \sqrt{A^2B^2\sin^2\theta + M\, du\, dv},$$

M étant une somme de termes contenant les carrés et le produit des deux dérivées de w.

Pour que les surfaces $w =$ const. soient minima, il faut que la variation de cet élément de surface soit nulle quand w reste constante. Or, la variation de M contenant les dérivées de w ne donnera que des termes nuls, et il faudra que $AB \sin\theta$ soit indépendant de w, ce qui montre que l'aire

$$\int\int_{(C)} AB \sin\theta\, du\, dv$$

est indépendante de w comme on l'a annoncé.

Cette propriété des surfaces minima est à rapprocher de la propriété analogue des lignes géodésiques.

[O¹7a]

UNE APPLICATION DU THÉORÈME DE MALUS AU PROBLÈME DE TRANSON;

PAR M. ÉMILE TURRIÈRE.

Soit un complexe de droites (C) tel que tout cône du complexe admette un axe de symétrie binaire : il en est ainsi en particulier pour les complexes quadratiques, puisque chaque cône du complexe étant du second degré admet trois axes de symétrie. De chaque point de l'espace partent ainsi une ou plusieurs droites, en nombre très limité, qui sont les axes des cônes du complexe (C); ces axes définissent donc, en général, un nouveau complexe (C′). Je me propose de montrer que la considération du complexe (C′) peut avoir parfois de l'intérêt. Tout d'abord je donnerai quelques exemples de complexes (C′).

1. Si le complexe (C) est le complexe linéaire, tout rayon du complexe passant par un point est axe de symétrie du plan focal de ce point : dans le cas où le complexe (C) est le complexe linéaire, il existe donc une infinité de complexes (C′) qui sont tous identiques entre eux et au complexe (C).

La perpendiculaire au plan focal au foyer est un axe de symétrie pour le cône dégénéré en un plan. Dans le cas du complexe linéaire, il existe donc un autre complexe (C′), distinct de (C), qui est *le complexe des perpendiculaires aux plans focaux aux foyers correspondants*.

Considérons le complexe linéaire dont l'équation réduite à sa forme canonique est, en coordonnées plückériennes,

$$p_6 + ap_3 = 0;$$

le plan focal du point de coordonnées (x, y, z) a pour équation

$$Xy - Yx + a(Z - z) = 0;$$

les axes coordonnés étant rectangulaires, il résulte de cette équation que les cosinus directeurs du rayon de (C') issu de (x, y, z) sont, en posant $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$p_1 = \frac{y}{\sqrt{a^2 + r^2}}, \qquad p_2 = -\frac{x}{\sqrt{a^2 + r^2}}, \qquad p_3 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}},$$

et que l'équation de ce même complexe est

$$p_3 p_6 - a(p_1^2 + p_2^2) = 0.$$

Ce complexe est donc un complexe quadratique, admettant pour transformations infinitésimales celles du complexe linéaire lui-même, c'est-à-dire la rotation autour de l'axe de révolution Oz et la translation parallèlement à ce même axe.

La détermination des congruences de normales qui appartiennent à ce complexe est aisée. D'après ce qui précède, il est défini à l'aide de points de départ et il suffit de chercher les surfaces de tourbillon du champ de vecteurs (X, Y, Z) :

$$X = \frac{y}{\sqrt{a^2 + r^2}}, \qquad Y = -\frac{x}{\sqrt{a^2 + r^2}}, \qquad Z = \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}};$$

les projections du vecteur tourbillon sont :

$$\frac{ay}{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad -\frac{ax}{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \frac{2a^2 + r^2}{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}};$$

les équations différentielles des lignes de tourbillon

étant

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} = \frac{a\,dz}{2a^2 + r^2},$$

ces lignes sont des hélices circulaires

$$r = \text{const.}, \qquad z = \frac{2a^2 + r^2}{a}\theta + \text{const.};$$

les surfaces résolvantes de Transon, identiques aux surfaces de tourbillon, sont donc représentées par l'équation générale

$$z = \frac{2a^2 + x^2 + y^2}{a} \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} + F(x^2 - y^2),$$

dans laquelle F est une fonction arbitraire de $x^2 + y^2$.

Si l'on désire avoir non pas les surfaces résolvantes, mais les surfaces dont les normales appartiennent au complexe envisagé, il suffit de considérer celles-ci comme enveloppées par des plans

$$x \cos\varphi \cos\psi + y \cos\varphi \sin\psi + z \sin\varphi = \varpi,$$

où ϖ est l'intégrale générale,

$$a\varpi = \frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\psi + \Phi(\varphi),$$

de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre particulièrement simple

$$a\frac{\partial\varpi}{\partial\psi} = \frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}.$$

2. Parmi les complexes quadratiques (C), je considérerai en premier lieu le complexe spécial attaché à une quadrique à centre. Les axes de symétrie d'un cône du complexe (C) sont alors les normales aux surfaces homofocales à la quadrique, qui passent par le sommet du cône. Les axes constituent, par suite, un com-

plexe (C′) unique et qui n'est autre que le complexe tétraédral attaché au système homofocal auquel appartient la quadrique.

Comme second et dernier exemple de complexe quadratique (C) associé à un complexe (C′) simple, je considérerai le complexe, d'équation

$$p_4 p_2 - p_3 p_1 = 0.$$

des droites équidistantes de deux points (*cf.* ma Note : *Conséquences de deux théorèmes de M. Bricard sur les tangentes communes à deux quadriques*, 1910). Le cône issu du point (x, y, z) est parallèle au cône d'équation

$$z(X^2 + Y^2) - xXZ - yYZ = 0;$$

les trois racines de son équation en S sont

$$S = z, \qquad S = \frac{1}{2}\left(z \pm \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right);$$

à la première racine, $S = z$, correspond un axe de direction

$$y, \quad x, \quad 0,$$

et à chacune des deux autres correspondent deux axes de direction

$$x, \quad y, \quad z \pm \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

il en résulte qu'au complexe (C) des droites équidistantes de deux points correspondent deux complexes (C′) : l'un est le complexe linéaire spécial attaché à la droite à l'infini du plan Oxy et l'autre le complexe linéaire spécial attaché à l'axe Oz, résultats dont il est possible de se rendre compte géométriquement.

3. Cela étant, considérons un complexe (C) quel-

conque, mais qui puisse être associé à un complexe (C′), et soit (S) une surface, supposée réfléchissante, dont les normales appartiennent au complexe (C′). De la définition même du complexe (C′), il résulte que le complexe (C) est invariant par réflexion sur la surface (S).

Une congruence de normales quelconque de (C) se réfléchira, dans les mêmes conditions, suivant une congruence, distincte ou non de la congruence primitive, mais qui sera une congruence de normales, en vertu du théorème de Malus.

Supposons maintenant que le problème de Transon soit résolu pour le complexe (C′) et que l'on connaisse une solution unique du même problème pour le complexe (C). Le théorème fondamental de M. Darboux qui permet d'obtenir toutes les congruences de normales d'un complexe donné, dès qu'une famille de solutions est connue, est inapplicable, en général, au cas où une solution unique est connue *a priori*. Il est remarquable que, dans le cas actuel, toutes les congruences de normales de (C) soient déterminables lorsqu'une d'elles est donnée.

La congruence de normales donnée ne sera certainement pas, en effet, invariante dans toutes les réflexions sur les diverses surfaces dont les normales appartiennent au complexe (C′). On pourra alors déterminer ainsi toutes les congruences de normales de (C) ou tout ou moins une infinité de telles congruences, ce qui est suffisant pour pouvoir appliquer le théorème de M. Darboux. Ainsi donc : *Lorsque, le problème de Transon étant résolu pour le complexe* (C′), *on connaît une congruence de normales du complexe* (C), *le problème de Transon est résoluble pour le dernier complexe.*

Le théorème précédent met en évidence l'intérêt qu'il y aurait à connaître ceux des complexes quadratiques (C) qui conduisent à des complexes (C′) simples ou remarquables, et à chercher si, parmi les complexes d'ordre supérieur, il existe des complexes dont tous les cônes soient donés d'axes de symétrie binaire ou, plus généralement, d'axes de symétrie quelconque.

[O¹7a]

SUR LES CONGRUENCES DE DROITES QUI ADMETTENT UN POINT POUR SURFACE CENTRALE;

PAR M. ÉMILE TURRIÈRE.

1. Les *Nouvelles Annales* de 1910 (p. 49 et p. 529) ont publié deux articles très intéressants de M. E. Keraval sur les *Surfaces partiellement cylindroïdes*. Entre autres résultats remarquables, M. Keraval a établi que la congruence formée par les génératrices d'un même système des quadriques

$$\frac{x^2}{(\beta+\sigma)(\gamma+\sigma)}+\frac{y^2}{(\gamma+\sigma)(\alpha+\sigma)}+\frac{z^2}{(\alpha+\sigma)(\beta+\sigma)}+1=0,$$

signalées par M. G. Humbert, en 1890, jouit de la propriété suivante : *la surface centrale de cette congruence* (c'est-à-dire l'enveloppe du plan équidistant des points focaux de chaque rayon) *est réduite au centre commun* O *des quadriques* (p. 539 des *Nouvelles Annales* de 1910). Je me propose de déterminer toutes les congruences de droites qui jouissent de la même propriété, de donner une réciproque du théorème relatif à la congruence considérée par M. Keraval et,

enfin, de montrer comment, un complexe de droites étant donné, il est possible de déterminer les congruences de ce complexe qui jouissent de la propriété en question.

I.

2. Soit une droite de coordonnées plückériennes $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$; les trois premières de ces six coordonnées sont les cosinus directeurs de la droite par rapport aux axes rectangulaires $O(x, y, z)$; ces cosinus directeurs dépendent de deux paramètres u et v par les formules

$$p_1 = \frac{u+v}{uv+1}, \qquad p_2 = \frac{i(v-u)}{uv+1}, \qquad p_3 = \frac{uv-1}{uv+1};$$

p_4, p_5, p_6 sont des fonctions de u et de v; dans ces conditions, la droite envisagée engendre une congruence. Soient d'autre part x_0, y_0, z_0 les coordonnées de la projection sur cette droite de l'origine des coordonnées; tout point de la droite ayant des coordonnées

$$x_0 + \frac{1}{2}(1+uv)^2 \mu p_1,$$
$$y_0 + \frac{1}{2}(1+uv)^2 \mu p_2,$$
$$z_0 + \frac{1}{2}(1+uv)^2 \mu p_3,$$

l'équation du second degré en μ dont dépendent les points focaux est

$$\mu^2 + \mu \mathrm{S}\left(\frac{\partial p_1}{\partial u}\frac{\partial x_0}{\partial v} + \frac{\partial p_1}{\partial v}\frac{\partial x_0}{\partial u}\right)$$
$$+ \mathrm{S}\frac{\partial p_1}{\partial u}\frac{\partial x_0}{\partial v} \times \mathrm{S}\frac{\partial p_1}{\partial v}\frac{\partial x_0}{\partial u} - \mathrm{S}\frac{\partial p_1}{\partial u}\frac{\partial x_0}{\partial u} \times \mathrm{S}\frac{\partial p_1}{\partial v}\frac{\partial x_0}{\partial v} = 0;$$

la condition nécessaire et suffisante pour que la surface centrale de la congruence dégénère tangentiellement en

le point O est celle

$$S \frac{\partial p_1}{\partial u} \frac{\partial x_0}{\partial v} + \frac{\partial p_1}{\partial v} \frac{\partial x_0}{\partial u} = 0$$

qui exprime que le point (x_0, y_0, z_0) est le milieu du segment focal.

En vertu des relations

$$S p_1 x_0 = 0, \qquad S p_1 \frac{\partial p_1}{\partial u} = 0, \qquad S p_1 \frac{\partial p_1}{\partial v} = 0,$$

on peut poser

$$x_0 = L \frac{\partial p_1}{\partial u} + M \frac{\partial p_1}{\partial v},$$

$$y_0 = L \frac{\partial p_2}{\partial u} + M \frac{\partial p_2}{\partial v},$$

$$z_0 = L \frac{\partial p_3}{\partial u} + M \frac{\partial p_3}{\partial v};$$

il résulte alors de formules remarquables entre les dérivées des cosinus directeurs, formules qui découlent d'ailleurs de la théorie générale de la représentation sphérique des surfaces, que la condition précédente prend la forme

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{L}{(1+uv)^2}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{M}{(1+uv)^2}\right] = 0;$$

cette dernière forme de la condition conduit immédiatement à la solution suivante du problème que je m'étais proposé : soit F une fonction absolument quelconque des variables u et v; il suffit, dans les expressions ci-dessus données des coordonnées x_0, y_0, z_0 de la projection de O sur le rayon (u, v) de la congruence, de poser

$$L = (1+uv)^2 \frac{\partial F}{\partial v},$$

$$M = -(1+uv)^2 \frac{\partial F}{\partial u}.$$

3. La détermination analytique de la congruence la plus générale dont la surface centrale est réduite au point O est ainsi complètement effectuée. Voici une définition géométrique fort simple qui découle des considérations que j'ai développées dans un article *Sur une transformation de droites*, publié par les *Nouvelles Annales* de 1909 (p. 249), et dans un article qui fait suite au précédent, *Sur les surfaces de M. Appell* (1910, p. 145).

Il résulte des expressions précédentes de L et de M que celles de x_0, y_0, z_0 sont susceptibles d'être mises sous les formes suivantes :

$$(x_0, y_0, z_0) = \frac{i}{2}(1 + uv)^2 \left[\frac{\partial(\varpi, p_1)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(\varpi, p_2)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(\varpi, p_3)}{\partial(u, v)}\right],$$

où ϖ désigne une fonction quelconque des variables u et v.

Appliquons la transformation de droites : x_0, y_0, z_0 se changent respectivement en les coordonnées p_4, p_5 p_6 de la droite transformée; u est changé en $-\frac{1}{v}$ et v en $-\frac{1}{u}$; finalement p_4, p_5, p_6 se présentent sous les formes (analogues à celles de x_0, y_0, z_0)

$$p_4 = \frac{i}{2}(1 + uv)^2 \frac{\partial(\varpi, p_1)}{\partial(u, v)}, \qquad \ldots,$$

caractéristiques des congruences de normales. Ainsi donc : *La congruence la plus générale dont la surface centrale est réduite au point* O *est transformée, par rapport à ce point, de la congruence de normales la plus générale.*

Il suffit donc d'appliquer la transformation de droites à une congruence quelconque de normales pour obtenir une congruence de droites dont les milieux des segments focaux sont les projections du point fixe O.

Dans mes articles cités, j'avais établi la propriété d'invariance, dans la transformation, qui caractérise les congruences de normales aux surfaces de M. Appell, congruences qui, par définition, sont des cas particuliers de celles que j'envisage actuellement. Le théorème que j'avais signalé relativement aux surfaces de M. Appell est donc complété par le résultat précédent.

4. La condition trouvée au paragraphe 2

$$S\frac{\partial p_1}{\partial u}\frac{\partial x_0}{\partial v}+\frac{\partial p_1}{\partial v}\frac{\partial x_0}{\partial u}=0,$$

peut être mise sous une autre forme, en introduisant les coordonnées plückériennes par les formules

$$\begin{aligned} x_0 &= p_3 p_5 - p_2 p_6, \\ y_0 &= p_1 p_6 - p_3 p_4, \\ z_0 &= p_2 p_4 - p_1 p_5, \end{aligned}$$

et en utilisant les relations suivantes :

$$\begin{aligned} p_3\frac{\partial p_2}{\partial u} - p_2\frac{\partial p_3}{\partial u} &= i\frac{\partial p_1}{\partial u}, \qquad \ldots, \\ p_2\frac{\partial p_3}{\partial v} - p_3\frac{\partial p_2}{\partial v} &= i\frac{\partial p_1}{\partial v}, \qquad \ldots; \end{aligned}$$

il vient alors

$$\frac{\partial(p_4, p_1)}{\partial(u, v)}+\frac{\partial(p_5, p_2)}{\partial(u, v)}+\frac{\partial(p_6, p_3)}{\partial(u, v)}=0.$$

Cette relation entraîne pour la congruence transformée celle

$$\frac{\partial(x_0, p_1)}{\partial(u, v)}+\frac{\partial(y_0, p_2)}{\partial(u, v)}+\frac{\partial(z_0, p_3)}{\partial(u, v)}=0$$

qui caractérise les congruences de normales (x_0, y_0, z_0 étant les coordonnées d'un point quelconque de départ des rayons).

II.

5. Soit maintenant une famille dépendant d'un paramètre σ de quadriques coaxiales :

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} + 1 = 0;$$

les génératrices définies par trois complexes linéaires

$$p_4 = \mu_1 p_1, \qquad \text{où} \qquad \mu_1^2 = \frac{BC}{A},$$

$$p_5 = \mu_2 p_2, \qquad \text{où} \qquad \mu_2^2 = \frac{CA}{B},$$

$$p_6 = \mu_3 p_3, \qquad \text{où} \qquad \mu_3^2 = \frac{AB}{C},$$

engendrent une congruence. Je me propose de déterminer toutes les familles de quadriques coaxiales telles que cette congruence soit une de celles que je viens de considérer.

D'après le paragraphe 4, je dois écrire que l'expression

$$S \frac{\partial(p_4, p_1)}{\partial(u, v)}$$

est nulle, en vertu des équations de la congruence : σ doit être regardée comme une certaine fonction de u et de v définie par la relation

$$\mu_1 p_1^2 + \mu_2 p_2^2 + \mu_3 p_3^2 = 0,$$

qui est une conséquence des équations de la congruence et de l'identité entre les six coordonnées plückériennes. En dérivant cette relation et désignant les dérivées de μ_1, μ_2, μ_3 par rapport à l'unique variable σ par μ'_1, μ'_2, μ'_3, on obtient des expressions de $\frac{\partial\sigma}{\partial u}$, $\frac{\partial\sigma}{\partial v}$;

en portant ces expressions dans la relation

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}\mathrm{S}\,\mu'_1 p_1 \frac{\partial p_1}{\partial v} - \frac{\partial\sigma}{\partial v}\mathrm{S}\,\mu'_1 p_1 \frac{\partial p_1}{\partial u} = 0,$$

il vient

$$\mathrm{S}\,(\mu_1\mu'_2 - \mu_2\mu'_1)p_1 p_2 \frac{\partial(p_1, p_2)}{\partial(u, v)} = 0;$$

de l'identité

$$\frac{\partial(p_1, p_2)}{\partial(u, v)} = -2i\frac{p_3}{(1+uv)^2},$$

et des identités obtenues par permutations circulaires des indices, il résulte que les fonctions μ_1, μ_2, μ_3 satisfont à l'équation

$$\mathrm{S}\,(\mu_1\mu'_2 - \mu_2\mu'_1) = 0,$$

qui prend la forme d'une équation de Pfaff

$$\mu'_1(\mu_2 - \mu_3) + \mu'_2(\mu_3 - \mu_1) + \mu'_3(\mu_1 - \mu_2) = 0;$$

ou encore

$$\begin{vmatrix} \mu'_1 & \mu_1 & 1 \\ \mu'_2 & \mu_2 & 1 \\ \mu'_3 & \mu_3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

la signification de cette équation de Pfaff est fort simple : si μ_1, μ_2, μ_3 sont regardées comme les coordonnées ordinaires d'un point, qui décrit une courbe lorsque σ varie, cette courbe figurative est plane et son plan passe par l'axe de symétrie ternaire du trièdre coordonné.

μ_1, μ_2, μ_3 ont pour expressions générales

$$\mu_1 = k_1 f(\sigma) + g(\sigma);$$
$$\mu_2 = k_2 f(\sigma) + g(\sigma);$$
$$\mu_3 = k_3 f(\sigma) + g(\sigma);$$

k_1, k_2, k_3 sont trois constantes arbitraires; $f(\sigma)$

et $g(\sigma)$ sont deux fonctions quelconques du paramètre σ; l'une quelconque de ces fonctions pourra être égale à σ, sauf dans le cas exceptionnel où elle serait constante; dans ce cas, l'autre fonction pourrait être prise égale à σ. Il résulte des expressions générales de μ_1, μ_2, μ_3 précédentes que la *famille cherchée la plus générale est constituée par des quadriques concentriques uniquement assujetties à la condition d'avoir mêmes directions de plans cycliques.* Il en est ainsi pour les quadriques de M. Humbert, pour lesquelles on a

$$\mu_1 = \alpha + \sigma,$$
$$\mu_2 = \beta + \sigma,$$
$$\mu_3 = \gamma + \sigma.$$

6. Ce même résultat, je vais l'établir en cherchant une famille de Lamé constituée par des quadriques concentriques et à axes inégaux (et par suite nécessairement coaxiales) telles que leurs génératrices engendrent une congruence dont la surface centrale soit réduite au centre commun de ces quadriques.

μ_1^2, μ_2^2, μ_3^2 sont inversement proportionnels à A^2, B^2, C^2. Posons

$$\mu_1 = \frac{\theta}{A}, \qquad \mu_2 = \frac{\theta}{B}, \qquad \mu_3 = \frac{\theta}{C};$$

il vient

$$\mu_2\mu'_3 - \mu_3\mu'_2 = \frac{\theta^2}{A^2B^2C^2}A^2(CB' - BC'), \qquad \ldots;$$

et par suite, d'après la relation

$$\sum(\mu_2\mu'_3 - \mu_3\mu'_2) = 0,$$

on a, quel que soit le facteur θ,

$$\begin{vmatrix} A' & A & A^2 \\ B' & B & B^2 \\ C' & C & C^2 \end{vmatrix} \equiv \mathrm{S}\, A'BC(C - B) = 0.$$

La condition formée par Maurice Levy pour que les quadriques considérées appartiennent à un système triple orthogonal est d'autre part

$$\sum A' A(B - C) = 0;$$

des deux conditions il résulte que A', B', C' sont respectivement proportionnels à

$$A(B + C), \qquad B(C + A), \qquad C(A + B).$$

A, B, C sont donc trois fonctions intégrales du système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{x(y+z)} = \frac{dy}{y(z+x)} = \frac{dz}{z(x+y)};$$

par le changement de variables défini par les formules

$$x = YZ, \qquad y = ZX, \qquad z = XY,$$

ce système se transforme en

$$dX = dY = dZ;$$

on a donc

$$X = \alpha + \sigma, \qquad Y = \beta + \sigma, \qquad Z = \gamma + \sigma$$

et, par conséquent :

$$\begin{aligned} A &= (\beta + \sigma)(\gamma + \sigma), \\ B &= (\gamma + \sigma)(\alpha + \sigma), \\ C &= (\alpha + \sigma)(\beta + \sigma); \end{aligned}$$

on reconnaît là les expressions des axes des quadriques de M. Humbert; X, Y, Z sont respectivement identiques à μ_1, μ_2 et μ_3.

7. Les équations des trois complexes linéaires qui ont en commun les génératrices d'un même système d'une quelconque des quadriques de M. Humbert

étant

$$p_4 = (\alpha + \sigma) p_1,$$
$$p_5 = (\beta + \sigma) p_2,$$
$$p_6 = (\gamma + \sigma) p_3,$$

il est possible de définir la congruence de ces génératrices, lorsque σ est variable, par les équations

$$(\beta - \gamma)\frac{p_4}{p_1} + (\gamma - \alpha)\frac{p_5}{p_2} + (\alpha - \beta)\frac{p_6}{p_3} = 0,$$

$$\alpha(\beta - \gamma)\frac{p_4}{p_1} + \beta(\gamma - \alpha)\frac{p_5}{p_2} + \gamma(\alpha - \beta)\frac{p_6}{p_3} + (\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha) = 0,$$

qui représentent respectivement deux complexes du troisième ordre; on peut encore envisager le troisième complexe du troisième ordre

$$(\beta - \gamma) p_1 p_5 p_6 + (\gamma - \alpha) p_2 p_6 p_4 + (\alpha - \beta) p_3 p_4 p_5 + (\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha) p_1 p_2 p_3 = 0;$$

le premier complexe est celui des génératrices des quadriques polaires réciproques, par rapport à une sphère concentrique, des quadriques d'un système homofocal, et des quadriques homothétiques. Le complexe se transforme en le complexe tétraédral dans la transformation de droites (*voir* mon article, 1909, p. 256). Le troisième complexe est celui, considéré par M. Humbert, que forment les génératrices des quadriques de M. Humbert et de leurs surfaces homofocales (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1890, CXI, p. 964); la transformation de droites le change en un complexe de même nature.

Quant aux trois complexes linéaires, la transformation de droites les change en trois complexes qui sont constitués par des droites sur lesquelles deux des trois plans coordonnés interceptent des segments constants.

En se reportant à un article intitulé : *Sur un complexe du quatrième ordre*, qui paraîtra prochainement dans les *Nouvelles Annales*, on voit que la congruence de normales transformée de la congruence des génératrices des quadriques de M. Humbert n'est autre que celle des droites dont trois points invariables sont assujettis à rester dans les trois plans coordonnés.

8. Pour terminer, j'indiquerai comment peut être résolu le problème suivant : *Étant donné un complexe de droites, déterminer celles de ses congruences dont les surfaces centrales dégénèrent en des points.*

On se donnera le point, qui pourra être quelconque; on transformera alors le complexe, à l'aide de la transformation de droites définie par ce point. Les congruences cherchées admettant le point choisi pour surface centrale seront transformées en les congruences de normales du nouveau complexe, et le problème est donc réductible au problème de Transon.

Mais le problème actuel est beaucoup plus général que le problème de Transon, puisqu'il faut chercher les congruences de normales d'une triple infinité de complexes.

CERTIFICATS D'ANALYSE SUPÉRIEURE.

Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Démontrer que toute fonction elliptique aux périodes* 2ω, $2\omega'$ *est une fonction rationnelle de* pu *et* $p'u$.

II. *Soit* $\rho = f(\theta)$ *l'équation d'une courbe plane* C *en*

coordonnées polaires. Sur le rayon vecteur OM *d'un point quelconque* M *de cette courbe on porte une longueur constante* MP *égale à a et dans le sens* MO. *Déterminer* $f(\theta)$ *de façon que, lorsque le point* M *parcourt la courbe* C, *l'aire balayée par le rayon vecteur* OP *soit égale à l'arc que décrit le point* M, *multiplié par une longueur constante b. On emploiera les fonctions de Jacobi et l'on supposera* $2a > b$.

Épreuve pratique. — *La fonction* pu *satisfaisant à la relation*

$$p'^2 u = 4pu(p^2 u - 1),$$

trouver la fonction primitive de

$$\frac{p^6 u}{(pu - 1)^2}.$$

(Juin 1910.)

Lille.

Première question. — *Étude des valeurs réelles de la fonction* pu :

1° *Lorsque, l'une des périodes étant réelle, l'autre est purement imaginaire;*

2° *Lorsque les deux périodes sont imaginaires conjuguées.*

Calculer, dans les deux cas, les périodes 2ω, $2\omega'$, *en fonction des invariants* g_1, g_2.

Construire, dans les deux cas, la courbe

$$x = pu, \qquad y = p'u.$$

Deuxième question. — *Étant donnée l'équation aux dérivées partielles du premier ordre*

$$(1) \qquad f(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 :$$

1° *Définir ce qu'on entend par une* intégrale complète; *faire voir comment on peut, d'une pareille intégrale, déduire toutes les autres;*

2° *Montrer comment l'intégrale singulière peut être déduite directement de l'équation* (1).

(Juillet 1910.)

1° *On considère la série*

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{n^2 a + nz}.$$

A quelle condition doit satisfaire la constante a pour que cette série soit convergente quel que soit z?

2° *Cette condition étant supposée remplie, démontrer que la somme* $\Theta(z)$ *de cette série est une fonction entière de z qui admet deux périodes, l'une de première, l'autre de troisième espèce: faire voir que* $\Theta(z)$ *s'annule une fois et une seule dans chaque parallélogramme construit sur ces deux périodes; donner l'expression générale des* zéros *de* $\Theta(z)$.

3° *Établir la relation qui existe entre la fonction* Θ *et la fonction* σ *construite avec les mêmes périodes. Décomposer* $\Theta(z)$ *en un produit de facteurs primaires.*

(Novembre 1910.)

Lyon.

Épreuve écrite. — I. *On considère l'équation*

$$g(x) + \lambda \int_0^{2\pi} g(y) \cos(x+y)\,dy = 1,$$

où λ *est une constante donnée et g une fonction inconnue.*

1° *Dans l'hypothèse* $\lambda = 1$, *donner la solution de cette équation, en se servant des formules de Fredholm;*

2° *Comment faut-il choisir* λ *pour que cette équation cesse d'avoir une solution unique? Que se passe-t-il alors?*

II. *Dans un plan, rapporté à des coordonnées polaires d'origine* O *et d'axe polaire* Ou, *on désigne par* y $(0 \leqq y \leqq 2\pi)$ *l'angle polaire d'un point quelconque du cercle* (C) *de centre* O *et de rayon* 1; *et par* a, x $(a > 0,\ 0 \leqq x \leqq 2\pi)$ *les coordonnées polaires d'un point* P *quelconque. Soit alors* W *le potentiel en* P *de la double couche de moment* $g(y)$ *disposée sur le cercle* (C).

1° *Mettre* W *sous la forme*

$$W = -\int_0^{2\pi} g(y) A(x, y \mid a) dy;$$

et, dans l'hypothèse $a < 1$, *développer* A *et* W *suivant les puissances entières de* a;

2° *Montrer que, si* W *est nul, quel que soit* x, *pour une valeur particulière quelconque de* a, *inférieure à* 1, W *est identiquement nul, ainsi que la fonction* g;

3° *En conclure que, pour* $a < 1$, *le noyau* A *est fermé et que la suite*

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$$

est fermée;

4° *Trouver les valeurs et les fonctions fondamentales du noyau* A, *pour* $a < 1$.

Épreuve pratique. — Épure (*données en centimètres*) : intersection d'un cône et d'un cylindre. — *Le cône, limité à sa base et à son sommet, a pour base dans le plan horizontal une circonférence (centre* $x = 0$, $y = 10$, $z = 0$; *rayon* $= 8$). *Le sommet est le point* $x = 0$, $y = 10$, $z = 16$. *Le cylindre a pour base un cercle de front (centre* $x = 3$, $y = 10$, $z = 5$; *rayon* $= 5$); *les génératrices sont horizontales, et inclinées à* 45° *sur le plan vertical de gauche avant à droite arrière. Représenter la partie solide du cône extérieure au cylindre.* (Juillet 1910.)

Épreuve écrite. — I. *Établir les formules relatives au passage à travers la couche attirante pour les dérivées premières d'un potentiel de double couche.*

II. *On imagine les opérations de Fredholm fournies par les divers noyaux* $A(x, y)$ *qui satisfont à un même système, supposé donné, d'équations aux dérivées partielles de la forme*

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + f(x)\frac{\partial A}{\partial x} + \varphi(x) A = 0,$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + g(y)\frac{\partial A}{\partial y} + \psi(y) A = 0:$$

1° *Montrer que ces opérations forment un groupe;*

2° *Montrer qu'à une opération quelconque de ce groupe correspond, en général, une opération du même groupe qui en est l'inverse:*

3° *Déduire de là une méthode de résolution des équations de Fredholm qui correspondent à un noyau* A *de l'espèce considérée: et comparer les formules obtenues à celles que donne la méthode de Fredholm;*

4° *Examiner le cas singulier, dans la résolution des équations de Fredholm de ce même type.*

Nota. — *Toutes les intégrales définies correspondant aux opérations et équations de Fredholm considérées seront supposées prises entre les mêmes limites constantes.*

Épreuve pratique. — *Soit*

$$k = \sin\theta, \qquad k_1 = \sin\theta_1, \qquad k_2 = \sin\theta_2, \qquad \ldots;$$

$$1 + k_1 = \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}, \quad 1 + k_2 = \frac{1}{\cos^2\frac{\theta_1}{2}}, \quad 1 + k_3 = \frac{1}{\cos^2\frac{\theta_2}{2}}, \quad \ldots.$$

Enfin

$$\frac{\pi}{2K} = \cos^2\frac{\theta}{2}\cdot\cos^2\frac{\theta_1}{2}\cdot\cos^2\frac{\theta_2}{2}\ldots.$$

Calculer K *avec l'approximation que comportent les Tables à 7 décimales, sachant que* $k^2 = \frac{1}{2}$. *On rappelle que* $\pi = 3,14159265\ldots.$ (Novembre 1910.)

CERTIFICATS DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

Lille.

On considère, en chaque point M *d'une ligne* (L) *tracée sur une surface donnée, la sphère* σ *qui touche la surface*

et qui contient le cercle osculateur de (L); *on désigne par* σ_1, σ_2 *les deux sphères* σ *relatives aux deux lignes de courbure du point* M, *par* $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$ *les courbures principales correspondantes, par* φ *l'angle que fait la tangente à* (L) *avec la première ligne de courbure; on représente enfin par les mêmes lettres accentuées les mêmes éléments relatifs au point* M′ *de* (L), *infiniment voisin de* M.

1° *Démontrer les formules suivantes :*

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &MM'\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\cos\varphi = \left(\widehat{\sigma_2, \sigma_2'}\right),\\ &MM'\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\sin\varphi = \left(\widehat{\sigma_1, \sigma_1'}\right),\\ &MM'\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right) = \frac{\left(\widehat{\sigma_1, \sigma_1'}\right)\left(\widehat{\sigma_2, \sigma_2'}\right)}{\left(\widehat{\sigma, \sigma'}\right)},\\ &\frac{1}{\left(\widehat{\sigma, \sigma'}\right)^2} = \frac{1}{\left(\widehat{\sigma_1, \sigma_1'}\right)^2} + \frac{1}{\left(\widehat{\sigma_2, \sigma_2'}\right)^2}, \end{aligned}\right.$$

et tirer de ces formules les conséquences qu'elles comportent, au point de vue de la transformation par inversion.

2° Σ *étant la sphère osculatrice de* (L) *au point* M, θ *l'angle sous lequel cette sphère coupe la surface, démontrer qu'on a*

$$(2)\qquad \left(\widehat{\Sigma\Sigma'}\right) \pm \left(\widehat{\sigma, \sigma'}\right) \pm d\theta = 0.$$

Conséquences de la relation (2).

N. B. — *Le symbole* $\left(\widehat{S, T}\right)$ *représente l'angle sous lequel se coupent les deux surfaces* S *et* T.

(Juillet 1910.)

1° Question de cours. — *Détermination des lignes de courbure et des courbures principales d'une surface quelconque, en coordonnées curvilignes.*

2° Application. — *Calculer la courbure totale* $\frac{1}{R_1 R_2}$ *et la courbure moyenne* $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ *de l'hélicoïde :*

$$x = u\cos(U + v),$$
$$y = u\sin(U + v),$$
$$z = kv,$$

k étant une constante, U une fonction de u; montrer que l'on peut, par des quadratures, déterminer cette fonction U de telle sorte qu'il existe une relation linéaire constante entre la courbure totale et la courbure moyenne.

(Novembre 1910.)

Rennes.

Composition écrite. — 1° *Sur deux surfaces S et S_1 non développables on fait correspondre les points M et M_1 où les plans tangents sont parallèles. Soient une courbe C située sur S et passant par M, MT la tangente en M à C, $M\Theta$ la direction conjuguée; soient C_1, M_1T_1, $M_1\Theta_1$ les éléments correspondants sur S_1.*

Montrer que $M\Theta$ et $M_1\Theta_1$ sont parallèles. En déduire que, si MT tourne autour de M dans le plan tangent, MT et M_1T_1 se correspondent homographiquement; définir cette homographie au moyen des directions asymptotiques en M et M_1.

2° *Il y a deux directions MT telles que M_1T_1 soit parallèle à MT; il existe sur S deux familles de courbes, à savoir les courbes (α) et les courbes (β) telles que les courbes correspondantes de S_1, à savoir (α_1) et (β_1) admettant en chaque point une tangente parallèle à la tangente correspondante de (α) ou de (β). Les courbes (α) et (β) sont conjuguées sur S; les courbes (α_1) et (β_1) sont conjuguées sur S_1.*

3° *Appliquer ce qui précède à une surface quelconque S et à une sphère S_1. Montrer que l'on retrouve les lignes de courbure de S.*

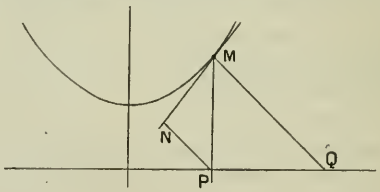
4° *Vérifier que sur les deux surfaces*

$$(S)\begin{cases} x = 3\alpha + 3\alpha\beta^2 - \alpha^3, \\ y = 3\beta + 3\beta\alpha^2 - \beta^3, \\ z = 3\alpha^2 - 3\beta^2, \end{cases}$$

$$(S_1)\begin{cases} x_1 = \dfrac{2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2 + 1}, \\ y_1 = \dfrac{-2\beta}{\alpha^2 + \beta^2 + 1}, \\ z_1 = \dfrac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{\alpha^2 + \beta^2 + 1}, \end{cases}$$

dont la seconde (S_1) *est une sphère, les points de paramètres* α, β *se correspondent d'après la règle précédente et que les courbes* $\alpha = \text{const.}$ *sur* $\beta = \text{const.}$ *se correspondent avec parallélisme des tangentes.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Soit la chaînette* $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$. *La parallèle à* Oy *menée par* M *coupe* Ox *en* P. *La perpendiculaire à la tangente abaissée de* P *coupe cette*



tangente en N. *On considère le lieu du point* N. *Construire cette courbe appelée « tractrice ».*

II. *En tournant autour de* Ox *la chaînette et la tractrice engendrent deux surfaces de révolution dont on demande de trouver les rayons de courbure principaux en* M *et en* N.

Vérifier que la chaînette engendre une surface minima $(R + R' = 0)$ *et la tractrice une surface à courbure totale constante* $(RR' = \text{const.})$. (Novembre 1910.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2084.

(1907, p. 327.)

Étant donnés un tétraèdre orthocentrique ABCD *et un point* M *de la sphère circonscrite, les parallèles à* MA, MB, MC, MD *menées par l'orthocentre* H *rencontrent les plans des faces correspondantes en quatre points situés dans un même plan et ce plan partage le segment* MH *dans le rapport de* 2 *à* 1. G. FONTENÉ.

SOLUTION,

Par M. R. BOUVAIST.

Prenons l'orthocentre du tétraèdre donné comme origine d'un système d'axes de coordonnées rectangulaires.

Soient

$$x^2+y^2+z^2-\rho^2=0$$

la sphère conjuguée au tétraèdre et

$$x\cos\alpha_i+y\cos\beta_i+z\cos\gamma_i-p_i=0 \qquad (i=1,2,3,4)$$

les faces de celui-ci.

Les coordonnées des sommets seront

$$x=\rho^2\frac{\cos\alpha_i}{p_i}, \qquad y=\rho^2\frac{\cos\beta_i}{p_i}, \qquad z=\rho^2\frac{\cos\gamma_i}{p_i},$$

et la sphère circonscrite aura pour équation

$$x^2+y^2+z^2-x\rho^2\frac{\Sigma\cos\alpha_i}{p_i}$$
$$-y\rho^2\frac{\Sigma\cos\beta_i}{p_i}-z\rho^2\frac{\Sigma\cos\gamma_i}{p_i}+3\rho^2=0.$$

La quadrique de révolution polaire réciproque de cette sphère par rapport à la sphère conjuguée sera

$$\rho^2(u^2+v^2+w^2)$$
$$+s\left[\rho^2\frac{\Sigma\cos\alpha_i}{p_i}u+\rho^2\frac{\Sigma\cos\beta_i}{p_i}v+\rho^2\frac{\Sigma\cos\gamma_i}{p_i}w+3s\right]=0.$$

Soit

$$ux+vy+wz+s=0$$

un plan tangent à cette quadrique.

Menons par chaque sommet du tétraèdre des plans parallèles aux plans déterminés par l'orthocentre et l'intersection de ce plan tangent avec la face opposée. Ces plans ont pour équations

$$(1)\quad x[p_iu+s\cos\alpha_i]+y[p_iv+s\cos\beta_i]+z[p_iw+s\cos\gamma_i]$$
$$=\rho^2\left[u\cos\alpha_i+v\cos\beta_i+w\cos\gamma_i+\frac{s}{p_i}\right].$$

Considérons maintenant le point M de coordonnées

$$x=\rho^2\frac{u}{s}+\rho^2\frac{\Sigma\cos\alpha_i}{p_i},\qquad y=\rho^2\frac{v}{s}+\rho^2\frac{\Sigma\cos\beta_i}{p_i},$$
$$z=\rho^2\frac{w}{s}+\rho^2\frac{\Sigma\cos\gamma_i}{p_i};$$

ce point est le point d'intersection des quatre plans (1). Substituons en effet les coordonnées de ce point dans l'équation du plan $i=1$, il vient

$$\left(\frac{u}{s}+\frac{\Sigma\cos\alpha_i}{p_i}\right)(p_1u+s\cos\alpha_1)$$
$$+\left(\frac{v}{s}+\frac{\Sigma\cos\beta_i}{p_i}\right)(p_1v+s\cos\beta_1)$$
$$+\left(\frac{w}{s}+\frac{\Sigma\cos\gamma_i}{p_i}\right)(p_1w+s\cos\gamma_1)$$
$$=\left(u\cos\alpha_1+v\cos\beta_1+w\cos\gamma_1+\frac{s}{p_1}\right);$$

d'où

$$p_1\left[\frac{u^2+v^2+w^2}{s}+u\frac{\Sigma\cos\alpha_i}{p_i}+v\frac{\Sigma\cos\beta_i}{p_i}+w\frac{\Sigma\cos\gamma_i}{p_i}\right]$$
$$+u\cos\alpha_1+v\cos\beta_1+w\cos\gamma_1$$
$$+s\left[\frac{\cos\alpha_1^2+\cos\beta_1^2+\cos\gamma_1^2}{p_1}\right.$$
$$+\frac{\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2}{p_2}$$
$$+\frac{\cos\alpha_1\cos\alpha_3+\cos\beta_1\cos\beta_3+\cos\gamma_1\cos\gamma_3}{p_3}$$
$$\left.+\frac{\cos\alpha_1\cos\alpha_4+\cos\beta_1\cos\beta_4+\cos\gamma_1\cos\gamma_4}{p_4}\right]$$
$$=\left[u\cos\alpha_1+v\cos\beta_1+w\cos\gamma_1+\frac{s}{p_1}\right],$$

Or

$$\cos\alpha_1^2+\cos\beta_1^2+\cos\gamma_1^2=1$$

et

$$\frac{\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2}{p_2}$$
$$=\frac{p_1}{p_2}=\frac{\cos\alpha_1\cos\alpha_3+\cos\beta_1\cos\beta_3+\cos\gamma_1\cos\gamma_3}{p_3}$$
$$=\frac{\cos\alpha_1\cos\alpha_4+\cos\beta_1\cos\beta_4+\cos\gamma_1\cos\gamma_4}{p_4},$$

ces conditions expriment en effet que le sommet $i=1$ est dans les plans

$$x\cos\alpha_i+y\cos\beta_i+z\cos\gamma_i-p_i=0 \qquad (i=2,3,4);$$

d'où finalement

$$\rho^2(u^2+v^2+w^2)$$
$$+s\left[u\rho^2\frac{\Sigma\cos\alpha_i}{p_i}+v\rho^2\frac{\Sigma\cos\beta_i}{p_i}+w\rho^2\frac{\Sigma\cos\gamma_i}{p_i}+3s\right]=0,$$

condition vérifiée puisque le plan

$$ux+vy+wz+s=0$$

est tangent à la quadrique dont l'équation est la précédente.

On vérifie de même que le point considéré est sur la sphère

circonscrite au tétraèdre et sur le plan

$$ux + vy + wz + 3s = 0,$$

Or si P est la projection de l'origine sur le plan

$$ux + vy + wz + s = 0$$

le plan

$$ux + vy + wz + 3s = 0$$

est le plan parallèle au précédent mené par le point P, tel que $\frac{HP_1}{HP} = 3$; il en résulte donc que la droite HM est partagée par le plan

$$ux + vy + wz + s = 0$$

dans le rapport de 2 à 1, ce qui démontre la proposition.

Remarque. — Le point M de coordonnées

$$x = \rho^2 \frac{u}{s} + \rho^2 \frac{\Sigma \cos \alpha_i}{p_i}, \qquad y = \rho^2 \frac{v}{s} + \rho^2 \frac{\Sigma \cos \beta_i}{p_i},$$
$$z = \rho^2 \frac{w}{s} + \rho^2 \frac{\Sigma \cos \gamma_i}{p_i},$$

est le point de la sphère ABCD diamétralement opposé au pôle du plan $ux + vy + wz + h = 0$ par rapport à la sphère conjuguée, ce qui permet de compléter l'énoncé de la façon suivante :

Étant donnés un tétraèdre orthocentrique ABCD *et un point* M *de la sphère circonscrite, les parallèles à* MA, MB, MC, MD *menées par l'orthocentre* H *rencontrent les plans des faces correspondantes en quatre points situés dans le plan polaire du point* M' *diamétralement opposé au point* M *dans la sphère* ABCD, *par rapport à la sphère conjuguée au tétraèdre et ce plan partage le segment* MH *dans le rapport de deux à un.*

2144.

(1910, p. 95.)

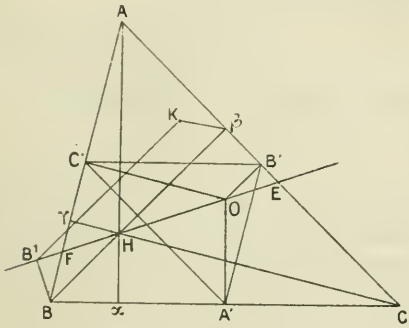
La droite d'Euler d'un triangle ABC (*droite qui joint l'orthocentre au centre du cercle circonscrit*) *coupe les*

côtés aux points D, E, F. *Les trois cercles de diamètres respectifs* AD, BE, CF *ont en commun un point* K *qui appartient au cercle des neuf points du triangle. Démontrer que la distance du point* K *au pied de l'une des hauteurs est égale à la somme de ses distances au pied des deux autres hauteurs.* V. Thébault.

Solution,

Par M. R. B. (¹).

Soient A′, B′, C′ les milieux des côtés du triangle ABC, O le centre du cercle circonscrit à ce triangle, H son orthocentre. L'orthocentre du triangle A′B′C′ est sur la droite OH, puisque les deux triangles ABC, A′B′C′ sont homothétiques



par rapport à leur centre de gravité commun qui est sur la droite OH. Il existe donc une parabole (P) inscrite dans le triangle A′B′C′ et ayant pour directrice la droite OH. Soit K le foyer de cette parabole.

Le triangle ABC, étant le triangle diagonal du quadrilatère circonscrit à (P) dont les côtés sont B′C′, C′A′, A′B′ et la droite de l'infini, est conjugué par rapport à la parabole.

Soit E le point de rencontre de la droite d'Euler OH avec CA. Le point E est à la fois sur la polaire de K et sur la polaire de B par rapport à (P). Le point E a donc pour

(¹) Les éléments de cette solution sont empruntés à celles que nous ont adressées MM. R. Bouvaist et L. Klug.

polaire BK : KE est par suite perpendiculaire à BK, en vertu d'une propriété bien connue de la parabole. Autrement dit, le point K appartient au cercle de diamètre BE. Il appartient de même aux cercles analogues, de diamètres AD et CF. Comme le point K appartient au cercle circonscrit à $A'B'C'$, c'est-à-dire au cercle des neuf points du triangle ABC, la première partie de la proposition est établie.

Soit maintenant B_1 la projection de B sur OH. La droite BB_1 étant parallèle à l'axe de (P), la polaire du point B_1 est parallèle à celle du point B : c'est donc la symétrique du point B_1 par rapport à $C'A'$. D'autre part, cette polaire doit passer par le foyer K, puisque B_1 est sur la directrice. On voit donc, en appelant β le pied de la hauteur issue du point B_1, que le trapèze $BB_1K\beta$ est isoscèle, son axe de symétrie étant $C'A'$. En particulier, on a

$$K\beta = BB_1.$$

On a de même, avec des notations analogues,

$$K\alpha = AA_1, \qquad K\gamma = CC_1.$$

Mais, comme la droite OH passe par le centre de gravité du triangle ABC, l'une des distances AA_1, BB_1, CC_1 est égale à la somme des deux autres. On a donc la même relation entre les trois longueurs $K\alpha$, $K\beta$, $K\gamma$. C. Q. F. D.

Comme on l'a dit plus haut, MM. R. Bouvaist et L. Klug nous ont adressé deux solutions. Le premier introduit la considération de la parabole (P). Mais la remarque que $K\alpha = AA_1, \ldots$ est due à M. Klug.

2149.

(1910, p. 144.)

On considère un point P *situé sur une normale à une ellipse donnée en un point* M *variable et partageant le rayon de courbure* MC *en deux parties ayant un rapport donné. Montrer que l'aire de la courbe lieu du point* P *est une fonction donnée des aires de l'ellipse et de sa développée.* E.-N. Barisien.

SOLUTION,

Par M. Thié.

La propriété reste vraie si l'on remplace l'ellipse par une courbe fermée quelconque.

Je désignerai par (M), (C) et (P) les aires respectives des courbes décrites par les points M, C, P.

Soient x, y les coordonnées du point M, R le rayon de courbure en M. Les coordonnées du point C sont, avec les notations ordinaires,

$$X = x - R\frac{dy}{ds}, \qquad Y = y + R\frac{dx}{ds}.$$

Celles du point P sont

$$\xi = \frac{x + kX}{1 + k}, \qquad \eta = \frac{y + kY}{1 + k},$$

k étant une constante. On a donc

$$(P) = \int \eta\, d\xi = \frac{1}{(1+k)^2}\int (y + kY)(dx + k\,dX),$$

l'intégrale du dernier membre pouvant être considérée comme une intégrale curviligne étendue à la courbe fermée décrite par le point M, après qu'on y a remplacé X et Y par leurs valeurs en fonction de x, y. On trouve, en développant,

$$\begin{aligned}(P) &= \frac{1}{(1+k)^2}\int y\,dx + \frac{k^2}{(1+k)^2}\int Y\,dx \\ &\quad + \frac{k}{(1+k)^2}\int y\,dX + Y\,dx \\ &= \frac{1}{(1+k)^2}(M) + \frac{k^2}{(1+k)^2}(C) + \frac{k}{(1+k)^2}\int y\,dX + Y\,dx.\end{aligned}$$

Considérons la dernière intégrale

$$I = \int y\,dX + Y\,dx;$$

on a

$$I = \int y\,dX + \int Y\,dx,$$

puis, en effectuant une intégration par parties dans la seconde intégrale,

$$\int Y\,dx = Yx - \int x\,dY.$$

Le terme intégré Yx reprend la même valeur à la fin et au début du circuit d'intégration, on a donc simplement

$$\int Y\,dx = -\int x\,dY,$$

d'où

$$\begin{aligned} I &= \int y\,dX - x\,dY \\ &= \int Y\,dX - X\,dY + \int (y - Y)\,dX - (x - X)\,dY; \end{aligned}$$

mais on a

$$(y - Y)\,dX - (x - X)\,dY = 0;$$

ceci exprime en effet que la tangente au point C passe par le point M. Il reste

$$I = \int Y\,dX - X\,dY = 2(C).$$

On trouve donc finalement

$$(P) = \frac{1}{(1+k)^2}(M) + \frac{k^2 + 2k}{(1+k)^2}(C),$$

ce qui établit la proposition.

Autre solution par M. R. Bouvaist.

2150.

On considère tous les triangles circonscrits à une parabole P et tels que les normales aux points de contact soient concourantes. Montrer que :

1° *Les perpendiculaires élevées aux côtés de ce triangle*

en leurs milieux (médiatrices) sont normales à une parabole fixe P'.

2° *Les milieux des côtés de ces triangles sont situés sur une parabole* P''. E.-N. BARISIEN.

SOLUTION,

Par M. R. BOUVAIST.

Soit

$$x = \frac{t^2}{2p}, \qquad y = t,$$

la parabole P, si les normales en trois points t_1, t_2, t_3 sont concourantes

$$t_1 + t_2 + t_3 = 0.$$

La tangente au point t a pour équation

$$T = y - t - \frac{p}{t}\left(x - \frac{t^2}{2p}\right) = 0,$$

le point T_1T_2 a pour coordonnées

$$x = \frac{t_1 t_2}{2p}, \qquad y = \frac{t_1 + t_2}{2},$$

le point T_1T_3

$$x = \frac{t_1 t_3}{2p}, \qquad y = \frac{t_1 + t_3}{2};$$

les coordonnées du milieu M du segment joignant ces deux points seront

$$x = \frac{t_1(t_2 + t_3)}{4p} = -\frac{t_1^2}{4p},$$

$$y = \frac{2t_1 + t_2 + t_3}{4} = \frac{t_1}{4};$$

ce point décrit la parabole

$$4y^2 + px = 0.$$

La perpendiculaire en M à la tangente T_1 sera

$$y - \frac{t_1}{4} + \frac{t_1}{p}\left(x + \frac{t_1^2}{4p}\right) = 0,$$

elle enveloppe la développée de parabole

$$(4x-p)^3+108py^2=0.$$

2153.

(1910, p. 240.)

La normale en un point M *d'une ellipse de centre* O *rencontre le grand axe en* N. *La parallèle à* OM *menée par* N *est normale à une ellipse fixe, dont deux des sommets coïncident avec les sommets du petit axe de l'ellipse donnée.* E.-N. Barisien.

SOLUTION,

Par M. L. Klug.

Abaissons du point M la perpendiculaire MQ sur le petit axe, et menons OP parallèle à NM. On a, avec les notations de la figure

$$\frac{QP}{QM}=\frac{QO}{QL}=\frac{MN}{ML}=\text{const.},$$

donc le point P décrit une ellipse ayant mêmes sommets du petit axe que la proposée. Il en est de même du point P′, symétrique du point P par rapport au point O. La tangente en P est la droite PT, perpendiculaire à OM, car P est l'orthocentre du triangle OMT. La tangente en P′ est parallèle à PT, donc la normale en P′ n'est autre que la droite P′N, ce qui démontre la proposition énoncée.

Autres solutions par MM. Bouvaist et Lez.

[X.6]

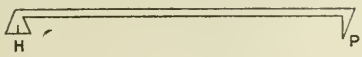
SUR LE PLANIMÈTRE DE PRITZ;

PAR LE LIEUTENANT E. DOUCET.

But. — Le but de cette étude sommaire est de donner une théorie complète du fonctionnement de cet appareil, de mettre en évidence les différentes approximations à faire pour établir sa théorie, et enfin d'établir la valeur de la précision de l'appareil.

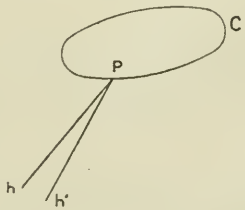
Description et mode d'emploi du planimètre de Pritz. — Le planimètre de Pritz se compose essen-

Fig. 1.



tiellement d'une tige métallique HP recourbée à ses deux extrémités. L'une d'elles P est une pointe mousse, l'autre H est une lame dont le plan est le plan de l'axe de la tige et de l'axe de la pointe P. Sur cette lame, en

Fig. 2.



son milieu, se trouve un trait de repère : c'est celui-ci que nous appellerons plus particulièrement H.

Ayant à déterminer l'aire d'une courbe C on place la

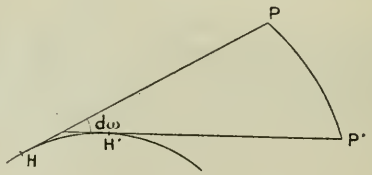
pointe P en un point quelconque de C, la lame H en un point quelconque de la feuille d'Épure à l'extérieur de C. On marque le point où se trouve H. Soit h ce point. On fait décrire la courbe C au point P. Quand la pointe P est revenue à son point de départ, la lame H occupe une certaine position, soit h' le point où se trouve H, l'aire de la courbe C est proportionnelle à la distance d des deux points h, h'.

Cette propriété se vérifie expérimentalement d'une manière aisée.

En partant d'un point fixe h on fait plusieurs mesures : on trouve des points h', h'', h''' répartis, aux erreurs d'expérience près, sur une circonférence de centre h.

Théorie de l'appareil. — Soit C la courbe décrite par le point P ; d'après la forme de la lame reposant

Fig. 3.



sur le papier, la droite HP restera dans son mouvement constamment tangente au lieu de H. La courbe C est la courbe obtenue en portant sur les tangentes à TΓ, à partir des points de contact, des longueurs égales à la longueur L du planimètre. TΓ est la trajectoire orthogonale des cercles de rayon égal à L et dont les centres décrivent C. Une application de la théorie des trajectoires orthogonales de cercles ou une démonstration directe très simple montre que si la tige du planimètre est tangente à C le point correspondant de TΓ est point

d'inflexion, et si la tige du planimètre est normale à C le point correspondant de TT' est point de rebroussement.

Élément infinitésimal d'aire. — Soient deux positions infiniment voisines HP, H'P' de la tige du planimètre. Évaluons l'aire balayée par la tige du planimètre en convenant de compter les variations d'angle positivement quand la tige du planimètre tourne dans le sens direct, négativement dans le cas contraire. La partie principale de cette aire infinitésimale HP, H'P' est $L^2\,d\omega$.

Aire finie. — L'aire balayée par la tige du planimètre entre deux positions HP, H_1P_1 faisant entre elles un angle Ω est donc

$$\int_0^{\Omega} L^2\,d\omega = L^2\Omega,$$

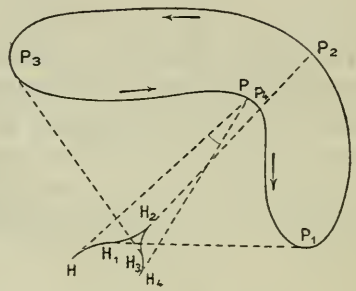
Ω étant évalué en radiant. Si donc nous convenons de compter comme positives les aires balayées par la tige du planimètre tournant dans le sens direct, comme négatives les aires balayées par la tige du planimètre tournant dans le sens inverse, nous aurons le résultat :

La somme algébrique des aires balayées par la tige du planimètre est égale au produit du carré de la longueur de la tige par l'angle, en radiant, des deux positions extrêmes de la tige.

Cas d'une courbe fermée. — Soit C une courbe fermée, partons de la position initiale du planimètre PH. Décrivons la courbe C dans le sens indiqué par la flèche. Au moment où la tige est tangente à C en P, le point H est en H_1 qui est un point d'inflexion.

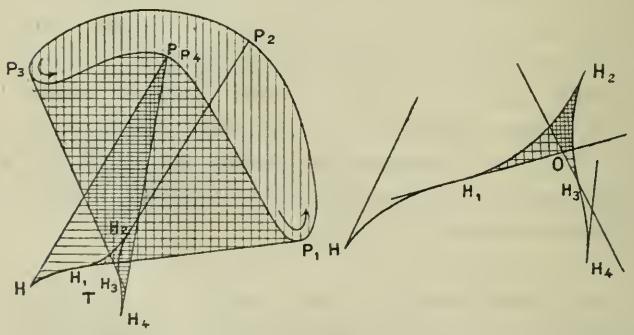
Continuons par les positions successives de P : $P_2 P_3 P_4$. Lorsque la pointe P est revenue en P, point

Fig. 4.



de départ, H est en H_4. Soit Ω, l'angle, en radiant, des deux positions extrêmes de la tige du planimètre. La somme algébrique des aires balayées par la tige est égale à $L^2\Omega$. Évaluons cette somme algébrique. Soit C l'aire de la courbe et A l'aire du secteur du centre P et limité par la courbe TΓ. Marquons sur la figure par des

Fig. 5.



traits horizontaux sur les aires négatives des traits verticaux sur les aires positives. On voit que la somme algébrique des aires balayées par la tige de l'appareil

est C — A. On a donc la relation

$$C - A = L^2\Omega.$$

Nécessité d'approximations. — La théorie jusqu'à présent est rigoureuse, mais elle ne donne rien, puisque A n'est pas connu. De plus A ne peut pas être facilement calculé en fonction de C et il existe de nombreux cas très simples où A ne peut pas être calculé en fonction de C.

Pour pousser plus loin la théorie, il est nécessaire de procéder à des approximations, quitte à calculer ensuite une limite supérieure de l'erreur commise.

Première approximation. — Nous supposerons que l'aire A est égale à l'aire du secteur circulaire de centre P et de rayon L, autrement dit nous confondrons l'aire du secteur curviligne $PH'H_2H_4$ avec l'aire du secteur circulaire $PH'H_4$

$$A = L^2\Omega.$$

D'où

$$C = L^2\Omega + L^2\Omega = 2L^2\Omega.$$

Soit δ la distance des deux points H, H_4, distance comptée suivant l'arc de circonférence HH_4

$$\delta = L\Omega,$$

d'où, par élimination de Ω,

$$C = 2L\delta.$$

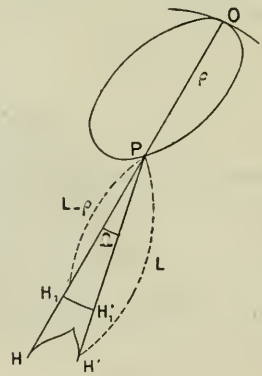
Deuxième approximation. — Comptons la distance d des deux points H, H_4 suivant la droite HH_4 et confondons d et δ, nous aurons finalement

$$C = 2Ld.$$

D'où un procédé connaissant L, mesurant d, pour calculer C.

Étude de la précision de l'instrument. Erreur provenant de la première approximation. — Soit ρ la distance au point P du point de la courbe C le plus éloigné de P, soit Q ce point; disposons l'instrument sensiblement dans la direction PQ. Tous les points de la courbe T se trouveront, dans ces conditions, en dehors de la courbe enveloppe des cercles de rayon L et dont les centres sont distribués sur le cercle de centre P et de rayon ρ. Ce n'est pas là une condition géométrique rigoureuse. En pratique elle est toujours satisfaite parce que L est grand par rapport à ρ. Cette courbe enveloppe est la circonférence de centre P et de rayon $L - \rho$. La courbe T est donc comprise entre les

Fig. 6.



circonférences de centre P et de rayon L et $L - \rho$. L'erreur ε commise en remplaçant l'aire limitée par T par l'aire du secteur circulaire est inférieure à l'aire $HH'H'_1H_1$ dont l'expression est $L^2\Omega - (L - \rho)^2\Omega$. Pour avoir une limite supérieure de l'erreur relative $\frac{\varepsilon}{C}$ rem-

plaçons ε par une valeur supérieure $[L^2 - (L - \rho)^2]\Omega$ et C par une valeur inférieure

$$C = L^2\Omega + A > L^2\Omega + L^2\Omega + (L - \rho)^2\Omega;$$

comme limite supérieure η de l'erreur relative commise on a donc

$$\eta = \frac{L^2 - (L - \rho)^2}{L^2 + (L - \rho)^2},$$

ou, en mettant en évidence le rapport $\frac{\rho}{L}$,

$$\eta = \frac{1 - \left(1 - \frac{\rho}{L}\right)^2}{1 + \left(1 + \frac{\rho}{L}\right)^2}.$$

Avec un planimètre donné, L est constant. Il faudra donc prendre ρ de telle manière que η soit aussi voisin de zéro que possible, c'est-à-dire ρ tel que

$$\frac{\rho}{L} \text{ soit aussi faible que possible,}$$

ou tel que

$$\frac{\rho}{L} \text{ soit aussi voisin de 2 que possible.}$$

Cette dernière condition se traduisant par

$$\frac{\rho}{L} = 2 \qquad \text{ou} \qquad \rho = 2L,$$

on voit qu'elle est incompatible avec la théorie précédente, supposant L grand par rapport à ρ.

Reste donc la première condition : on en déduit la règle pratique d'usage :

Prendre comme point de départ P, un des points tels que la distance, à ce point P, du point Q de la courbe C le plus éloigné de P soit aussi faible que possible, et tel que la courbe C soit tout entière d'un

même côté de la tangente en P à la courbe. Orienter la tige du planimètre sensiblement dans la direction PQ.

Dans ces conditions en désignant par ρ la distance PQ, l'erreur relative commise est inférieure à

$$\eta = \frac{1 - \left(1 - \frac{\rho}{4}\right)^2}{1 + \left(1 - \frac{\rho}{4}\right)^2}.$$

Exemple numérique. — Évaluer l'aire d'un cercle de 5^{cm} de rayon avec un planimètre dont la tige est longue de 100^{cm}. $\eta =$ environ $\frac{1}{9}$.

L'instrument, s'il est très simple, est très peu précis.

Erreur provenant de la deuxième approximation. — Elle est négligeable devant la précédente, l'angle Ω étant toujours faible si L est grand.

[D2 b α]

SUR QUELQUES SÉRIES;

PAR M. E.-N. BARISIEN.

Le but de cette Note est de déduire des séries remarquables comme conséquences des développements en séries de $\sin x$ et $\cos x$

$$(1) \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

$$(2) \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots.$$

1. Ces séries deviennent pour $x = \frac{\pi}{2}$

$$(3) \qquad 1 = \frac{\frac{\pi}{2}}{} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{1.2.3} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

$$(4) \qquad 1 = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{1.2} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^4}{1.2.3.4} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^6}{1.2.3.4.5.6} - \ldots.$$

En égalant les séries (3) et (4), on a, en divisant par $\frac{\pi}{2}$,

$$1 - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{1.2.3} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^4}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

$$= \frac{\frac{\pi}{2}}{1.2} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{1.2.3.4} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{1.2.3.4.5.6} - \ldots.$$

D'où

$$(5) \quad 1 = \frac{\frac{\pi}{2}}{1.2} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{1.2.3} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{1.2.3.4}$$

$$- \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^4}{1.2.3.4.5} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{1.2.3.4.5.6} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^6}{1.2.3.4.5.6.7} - \ldots$$

2. En faisant $x = \pi$, (1) et (2) deviennent

$$(6) \qquad 1 = \frac{\pi^2}{1.2.3} - \frac{\pi^4}{1.2.3.4.5} + \frac{\pi^6}{1.2.3.4.5.6.7} - \ldots,$$

$$(7) \qquad 2 = \frac{\pi^2}{1.2} - \frac{\pi^4}{1.2.3.4} + \frac{\pi^6}{1.2.3.4.5.6} - \ldots.$$

En ajoutant (6) et (7), on a

$$(8) \qquad 3 = \frac{4\pi^2}{1.2.3} - \frac{6\pi^4}{1.2.3.4.5} + \frac{8\pi^6}{1.2.3.4.5.6.7} - \ldots.$$

En ajoutant (8) et (6), on a encore

$$(9) \qquad 4 = \frac{5\pi^2}{1.2.3} - \frac{7\pi^4}{1.2.3.4.5} + \frac{9\pi^6}{1.2.3.4.5.6.7} - \ldots.$$

En général, on a, pour un nombre entier quelconque λ,

$$(10)\quad \lambda = \frac{(\lambda+1)\pi^2}{1.2.3} - \frac{(\lambda+3)\pi^4}{1.2.3.4.5} + \frac{(\lambda+5)\pi^6}{1.2.3.4.5.6.7} - \ldots.$$

3. En retranchant (6) et (7), on a

$$(11)\quad 1 = \frac{\pi^2}{1.3} - \frac{\pi^4}{1.2.3.5} + \frac{\pi^6}{1.2.3.4.5.7} - \frac{\pi^8}{1.2.3.4.5.6.7.9} + \ldots.$$

4. Multiplions (6) par (2), il vient

$$(12)\quad 2 = \frac{\pi^2}{1.3} - \frac{\pi^4}{1.3.4.5} + \frac{\pi^6}{1.3.4.5.6.7} - \ldots.$$

En retranchant (7) et (12), on obtient

$$(13)\quad 0 = \frac{\pi^2}{1.2.3} - \frac{3\pi^4}{1.2.3.4.5} + \frac{5\pi^6}{1.2.3.4.5.6.7} - \frac{7\pi^8}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} + \ldots.$$

On en déduit aussi

$$(14)\quad 1 = \frac{3\pi^2}{4.5} - \frac{5\pi^4}{4.5.6.7} + \frac{7\pi^6}{4.5.6.7.8.9} - \ldots$$

ou

$$(15)\quad 20 = 3\pi^2 - \frac{5\pi^4}{6.7} + \frac{7\pi^6}{6.7.8.9} - \ldots.$$

En ajoutant (7) et (12), on a encore

$$(16)\quad 4 = \frac{5\pi^2}{1.2.3} - \frac{7\pi^4}{1.2.3.4.5} + \frac{9\pi^6}{1.2.3.4.5.6.7} - \ldots.$$

5. En faisant $x = 2\pi$ dans (1), on a

$$(17)\quad 1 = \frac{(2\pi)^2}{1.2.3} - \frac{(2\pi)^4}{1.2.3.4.5} + \frac{(2\pi)^6}{1.2.3.4.5.6.7} - \ldots.$$

De même, pour $x = 2\lambda\pi$, λ étant un nombre entier, on a

$$(18)\qquad 1 = \frac{(2\lambda\pi)^2}{1.2.3} - \frac{(2\lambda\pi)^4}{1.2.3.4.5} + \frac{(2\lambda\pi)^6}{1.2.3.4.5.6.7} - \ldots$$

La valeur $\lambda = 2\pi$ dans (2) donne

$$(19)\qquad 1 = \frac{(2\pi)^2}{3.4} - \frac{(2\pi)^4}{3.4.5.6} + \frac{(2\pi)^6}{3.4.5.6.7.8} - \ldots$$

On a aussi pour $x = 2\lambda\pi$ (λ entier)

$$(20)\qquad 1 = \frac{(2\lambda\pi)^2}{3.4} - \frac{(2\lambda\pi)^4}{3.4.5.6} + \frac{(2\lambda\pi)^6}{3.4.5.6.7.8} - \ldots$$

6. En faisant $x = 45^\circ$ dans (1) et (2), on a

$$(21)\qquad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^3}{1.2.3} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

$$(22)\qquad \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{1.2} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^4}{1.2.3.4} - \ldots.$$

En ajoutant ces deux dernières séries, on a l'expression de $\sqrt{2}$ en fonction de π

$$(23)\qquad \sqrt{2} = 1 + \frac{\pi}{4} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{1.2} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^3}{1.2.3} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^4}{1.2.3.4} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

7. Faisons $x = 30^\circ$ dans (1) et (2), il en résulte

$$(24)\qquad \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} - \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^3}{1.2.3} + \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

$$(25)\qquad \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^2}{1.2} + \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^4}{1.2.3.4} - \ldots.$$

8. La valeur $x = 60^\circ$ donne pour (1) et (2)

$$(26)\qquad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^3}{1.2.3} + \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

$$(27)\qquad \frac{1}{2} = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2}{1.2} - \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^4}{1.2.3.4} - \ldots.$$

9. En ajoutant (25) et (26), on a l'expression de $\sqrt{3}$ en fonction de π

$$(28)\qquad \sqrt{3} = 1 + \frac{\pi}{3} - \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^2}{1.2} - \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^3}{1.2.3} + \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^4}{1.2.3.4} + \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^5}{1.2.3.4.5} - \ldots.$$

10. L'égalité de (24) et (27) donne

$$(29)\qquad 1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2}{1.2} - \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^3}{1.2.3} - \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^4}{1.2.3.4} + \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^5}{1.2.3.4.5} + \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^6}{1.2.3.4.5.6} - \ldots.$$

11. L'égalité de (25) et (26) donne de même

$$(30)\qquad 1 = \frac{\pi}{3} + \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^2}{1.2} - \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^3}{1.2.3} - \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^4}{1.2.3.4} + \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^5}{1.2.3.4.5} + \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^6}{1.2.3.4.5.6} - \ldots.$$

12. Pour $x = 18^\circ$, $\sin x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Donc (1) devient

$$\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\pi}{20} - \frac{\left(\frac{\pi}{20}\right)^3}{1.2.3} + \frac{\left(\frac{\pi}{20}\right)^5}{1.2.3.4.5} - \ldots.$$

Il en résulte le développement de $\sqrt{5}$ en fonction de π

$$(31)\quad \sqrt{5} = 1 + 4\left[\frac{\pi}{20} - \frac{\left(\frac{\pi}{20}\right)^3}{1.2.3} + \frac{\left(\frac{\pi}{20}\right)^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\left(\frac{\pi}{20}\right)^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots\right].$$

13. On peut, par des combinaisons d'addition ou soustraction de ces diverses séries, en obtenir une infinité d'autres.

Par exemple, l'addition de (23) et (28) donnera la curieuse série suivante du développement de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ en fonction de π :

$$(32)\quad \sqrt{2} + \sqrt{3} = 2 + \frac{7\pi}{12} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{6}\right)^2}{1.2} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 + \left(\frac{\pi}{3}\right)^3}{1.2.3}$$
$$+ \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 + \left(\frac{\pi}{6}\right)^4}{1.2.3.4} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^5 + \left(\frac{\pi}{3}\right)^5}{1.2.3.4.5}$$
$$- \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^6 + \left(\frac{\pi}{6}\right)^6}{1.2.3.4.5.6} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^7 + \left(\frac{\pi}{3}\right)^7}{1.2.3.4.5.6.7}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Et l'on sait que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est une valeur approchée de π.

[N¹1j]

SUR UN COMPLEXE DU QUATRIÈME ORDRE;

PAR M. ÉMILE TURRIÈRE.

---

1. Dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de 1881 (t. XCII, p. 446) et dans les *Annales*

de l'École Normale de 1889 (t. VI, p. 381), M. Darboux a été amené, à propos de la surface des ondes, à étudier une congruence de droites remarquable : celle qui est constituée par une droite dont trois points déterminés sont assujettis à rester dans trois plans rectangulaires.

A la suite de Dupin, qui avait établi que tout point de la droite engendre un ellipsoïde, diverses recherches avaient été faites relativement au déplacement de cette droite. M. Darboux démontra que la congruence est une congruence de normales; l'une des surfaces parallèles auxquelles reste constamment normale la droite a une définition géométrique simple : c'est le lieu du milieu du segment formé par la projection du sommet du trièdre trirectangle et par la trace de la droite sur une des trois faces de ce trièdre. Les lignes de courbure de cette surface sont algébriques.

Plus généralement, s'il existe deux relations entre les longueurs des trois segments de la normale à une surface compris entre le pied de cette normale et les traces sur trois plans rectangulaires, l'une de ces relations est nécessairement la suivante : les segments de normale compris entre les trois plans ont des rapports invariables.

Tels sont les résultats établis par M. Darboux. Vu l'importance de la congruence de normales précédente, je me suis proposé d'étudier le *complexe des droites sur lesquelles deux plans rectangulaires interceptent un segment de longueur constante.*

2. Je prendrai naturellement les deux plans pour plans coordonnés d'intersection Oz; soit $2a$ la longueur constante du segment qu'ils interceptent sur les rayons du complexe. En prenant les équations d'une droite

sous la forme

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma},$$

on trouve immédiatement la relation

$$4a^2=(\beta x_0-\alpha y_0)^2\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{\gamma^2}{\alpha^2\beta^2}\right);$$

l'équation du complexe en coordonnées plückériennes p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6 est donc

$$p_6^2=4a^2\,\frac{p_1^2p_2^2}{p_1^2+p_2^2+p_3^2}.$$

Le complexe est du quatrième ordre, résultat qu'il est aisé de prévoir géométriquement. Les courbes planes du complexe sont, en effet, des enveloppes de droites sur lesquelles deux droites fixes, rectangulaires ou obliques, interceptent des segments constants : ces courbes sont, par conséquent, des hypocycloïdes à quatre rebroussements ou des courbes parallèles d'hypocycloïdes à quatre rebroussements (*cf.* question 1391 des *Nouvelles Annales*, Laguerre). Ces courbes étant de la quatrième classe, le complexe est bien du quatrième ordre.

On peut d'ailleurs envisager les cônes du complexe. Soit M un point de l'espace; le cône du complexe de sommet M a pour base dans le plan $y=0$, par exemple, la trace sur ce plan d'une surface conchoïdale du plan $x=0$; cette courbe est du quatrième degré et, par conséquent, le complexe est du quatrième ordre.

3. La détermination des surfaces dont les normales appartiennent au complexe peut être effectuée de plusieurs façons.

Le complexe est engendré par une translation arbi-

traire parallèle à Oz d'une congruence de normales connue : on se trouve donc dans le cas où une famille de surfaces non parallèles connue a pour normales des droites du complexe. D'après un théorème de M. Darboux, on peut alors déterminer la surface la plus générale dont les normales appartiennent au complexe. Il suffit de considérer l'enveloppe d'une famille à un paramètre de surfaces choisies arbitrairement parmi les surfaces connues et leurs surfaces parallèles.

Il est aisé de former l'équation générale des surfaces précédentes en coordonnées tangentielles. En considérant une surface quelconque comme enveloppe du plan

$$x\cos\varphi\cos\psi + y\cos\varphi\sin\psi + z\sin\varphi = \varpi,$$

les coordonnées plückériennes de la normale au point de contact de ce plan sont

$$\begin{aligned}
p_1 &= \cos\varphi\cos\psi,\\
p_2 &= \cos\varphi\sin\psi,\\
p_3 &= \sin\varphi,\\
p_4 &= \frac{\partial\varpi}{\partial\varphi}\sin\psi - \frac{\partial\varpi}{\partial\psi}\cos\psi\,\mathrm{tang}\,\varphi,\\
p_5 &= -\frac{\partial\varpi}{\partial\varphi}\cos\psi - \frac{\partial\varpi}{\partial\psi}\sin\psi\,\mathrm{tang}\,\varphi,\\
p_6 &= \frac{\partial\varpi}{\partial\psi}.
\end{aligned}$$

D'après ces relations, les surfaces cherchées ne sont autres que les surfaces intégrales de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{\partial\varpi}{\partial\psi} = \pm\, 2a\cos^2\varphi\cos\psi\sin\psi,$$

c'est-à-dire les surfaces d'équation générale

$$\varpi = \mp\, a\cos^2\varphi\cos^2\psi + \Phi,$$

dans laquelle Φ représente une fonction arbitraire de φ.

4. Comme application des formules précédentes il est possible de vérifier le théorème de M. Darboux sur la congruence des droites dont trois points décrivent les trois plans de coordonnées. Considérons les trois complexes

$$p_4^2(p_1^2+p_2^2+p_3^2)=K_1^2p_2^2p_3^2,$$
$$p_5^2(p_1^2+p_2^2+p_3^2)=K_2^2p_3^2p_1^2,$$
$$p_6^2(p_1^2+p_2^2+p_3^2)=K_3^2p_1^2p_2^2;$$

écrivons que les trois équations

$$p\sin\psi-q\cos\psi\tang\varphi=K_1\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi,$$
$$-p\cos\psi-q\sin\psi\tang\varphi=K_2\sin\varphi\cos\varphi\cos\psi,$$
$$q=K_3\cos^2\varphi\sin\psi\cos\psi,$$

sont compatibles en p et q; la condition est

$$K_1+K_2+K_3=0,$$

et elle est bien remplie actuellement : elle n'est autre que la relation algébrique entre les distances de trois points en ligne droite. Moyennant cette condition on a

$$p=\sin\varphi\cos\varphi(K_1\sin^2\psi-K_2\cos^2\psi),$$
$$q=-(K_1+K_2)\sin\psi\cos\psi\cos^2\varphi;$$

entre ces expressions de p et de q existe la relation supplémentaire

$$\frac{\partial p}{\partial\psi}=\frac{\partial q}{\partial\varphi}=\frac{1}{2}(K_1+K_2)\sin2\varphi\sin2\psi,$$

qui exprime que p et q sont les dérivées $\frac{\partial\varpi}{\partial\varphi}$ et $\frac{\partial\varpi}{\partial\psi}$ d'une même fonction :

$$\varpi=\frac{1}{8}(1+\cos2\varphi)[(K_1+K_2)\cos2\psi+(K_2-K_1)]+\text{const.}$$

Telle est l'équation des surfaces parallèles orthogonales aux droites de la congruence.

5. On peut encore appliquer au complexe précédent

$$p_6 = 2ap_1p_2,$$

la méthode de Transon. Si de chaque point M de l'espace on fait partir la droite de cosinus directeurs

$$X = \frac{x}{a}, \qquad Y = -\frac{y}{a}, \qquad Z = \sqrt{1 - \frac{x^2+y^2}{a^2}},$$

les projections du tourbillon du vecteur X, Y, Z sont

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{y}{a^2 Z},$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = -\frac{x}{a^2 Z};$$

les lignes de tourbillon sont donc des cercles d'axe Oz; les surfaces de tourbillon sont les surfaces de révolution autour de Oz. *Pour avoir la congruence de normales la plus générale du complexe considéré, il suffit donc de faire partir les droites* (X, Y, Z) *des divers points d'une surface de révolution autour de* Oz. En faisant varier arbitrairement cette dernière surface, on engendre toutes les congruences de normales du complexe.

6. La transformation de droites que j'ai étudiée dans les *Nouvelles Annales* de 1909 (p. 254) permet de donner une autre définition géométrique du même complexe. Appliquons-lui la transformation de droites; l'équation du complexe transformé est

$$p_2p_4 - p_1p_3 = 2ap_1p_2;$$

ce complexe est quadratique; il est possible de lui donner une définition remarquable [1].

Considérons en effet deux droites Δ, Δ' de l'espace. Nous supposons que Oz soit la perpendiculaire commune à Δ et Δ', que Oxy soit le plan équidistant de ces droites et enfin que Ox et Oy soient bissectrices de leurs directions. Cela revient à dire que nous prenons pour équations des droites Δ et Δ' :

$$(\Delta) \qquad z = 1, \qquad y = x \operatorname{tang} \alpha,$$
$$(\Delta') \qquad z = -1, \qquad y = -x \operatorname{tang} \alpha;$$

considérons le complexe linéaire

$$A_1 p_1 + A_2 p_2 + A_3 p_3 + A_4 p_4 + A_5 p_5 + A_6 p_6 = 0,$$

le plus général qui passe par Δ et Δ'. Les coordonnées plückériennes de ces deux droites étant

$$(\Delta) \qquad \begin{cases} p_1 = \cos\alpha, & p_2 = \sin\alpha, & p_3 = 0, \\ p_4 = \sin\alpha, & p_5 = -\cos\alpha, & p_6 = 0. \end{cases}$$

$$(\Delta') \qquad \begin{cases} p_1 = \cos\alpha, & p_2 = -\sin\alpha, & p_3 = 0, \\ p_4 = \sin\alpha, & p_5 = \cos\alpha, & p_6 = 0, \end{cases}$$

on trouve pour conditions

$$(A_1 - A_5)\cos\alpha + (A_2 + A_4)\sin\alpha = 0,$$
$$(A_1 + A_5)\cos\alpha + (A_4 - A_2)\sin\alpha = 0;$$

---

[1] La détermination des congruences de normales du complexe transformé est immédiate ; l'équation à intégrer

$$\frac{\partial \varpi}{\partial \varphi} = a \cos\varphi \sin 2\psi$$

admet pour intégrale générale

$$\varpi = a \sin\varphi \sin 2\psi + \Psi(\psi),$$

Ψ étant la fonction arbitraire d'intégration.

on peut donc poser

$$A_1 = \rho \sin\alpha, \quad A_2 = \sigma \cos\alpha,$$
$$A_4 = -\rho \cos\alpha, \quad A_5 = \sigma \sin\alpha,$$

ρ et σ étant arbitraires; A_3 et A_6 restent arbitraires.

Les équations de l'axe du complexe linéaire étant

$$\frac{A_1 + A_6 y - A_5 z}{A_4} = \frac{A_2 + A_4 z - A_6 x}{A_5} = \frac{A_3 + A_5 x - A_4 y}{A_6},$$

les coordonnées plückériennes $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ de l'axe sont liées par les relations

$$\frac{A_1 - p_4}{p_1} = \frac{A_2 - p_5}{p_2} = \frac{A_3 - p_6}{p_3}$$

et des relations

$$A_1 = -p_1 \operatorname{tang}\alpha,$$
$$A_2 = p_2 \cot\alpha;$$

il résulte que l'axe engendre le complexe

$$\left(\frac{p_4}{p_1} - \frac{p_5}{p_2}\right) \sin\alpha \cos\alpha + 1 = 0;$$

d'où le théorème suivant : *Le complexe des droites sur lesquelles deux plans rectangulaires interceptent des segments de longueur constante peut être considéré comme correspondant au complexe lieu des axes des complexes linéaires assujettis à passer par deux droites données* [1].

7. La congruence des droites dont trois points sont

---

[1] Dans le cas où a est nul, les complexes considérés dégénèrent respectivement en le complexe linéaire spécial et en le complexe des droites équidistantes des deux points [*cf.* mes articles *Sur une transformation de droites* (1909), et *Conséquences de deux théorèmes de M. Bricard sur les tangentes communes à deux quadriques* (1910)].

assujettis à rester dans trois plans rectangulaires est représentée par les équations

$$p_4 = K_1 p_2 p_3, \qquad p_5 = K_2 p_3 p_1, \qquad p_6 = K_3 p_1 p_2,$$

compatibles pour $K_1 + K_2 + K_3 = 0$. Multiplions respectivement les trois équations précédentes par p_1, p_2, p_3, puis par trois constantes A, B, C et ajoutons; il vient

$$A p_1 p_4 + B p_2 p_5 + C p_3 p_6 = p_1 p_2 p_3 (AK_1 + BK_2 + CK_3);$$

il résulte de l'équation précédente que la congruence de normales considérée au paragraphe 1 appartient aussi à un complexe tétraédral; on peut prendre pour équation de ce complexe

$$(K_2 - K_3) p_1 p_4 + (K_3 - K_1) p_2 p_5 + (K_1 - K_2) p_3 p_6 = 0.$$

La surface envisagée par M. Darboux jouit donc des propriétés des surfaces dont les normales sont des rayons du complexe tétraédral; elle peut, en particulier, être considérée comme une surface telle que, sur chacune des faces du trièdre trirectangle, les traces de la normale et du plan tangent correspondant sont pôle et polaire par rapport à une certaine conique.

[R4aδ]

SUR LA POULIE FIXE;

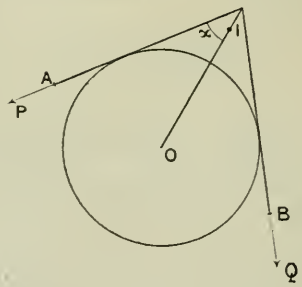
PAR M. L. ZORETTI.

On passe d'habitude avec une grande rapidité dans les cours de statique sur les conditions d'équilibre de la poulie fixe. Pourtant, précisément à cause de sa

grande simplicité, cette machine simple fournit un excellent exemple à propos duquel on peut aisément expliquer un certain nombre de phénomènes : raideur, frottement, adhérence qui sont, pour les élèves, et pour tous les élèves, parmi les plus difficiles à saisir. Elle se prête également à des expériences d'une grande simplicité.

I. *On néglige les frottements.* — 1. Négligeons également la raideur et le poids de la poulie, de la corde et de la chape OI. Nous sommes donc dans les conditions de l'étude élémentaire. On se contente d'habitude de

Fig. 1.



dire : prenons les moments par rapport à O sans expliquer de quel système matériel il est question. Nous avons ici trois systèmes : deux solides, la chape et la poulie, et un déformable, la corde. Nous pourrons à volonté appliquer à l'un quelconque d'entre eux ou à leur réunion les conditions d'équilibre du corps solide, qui sont toujours des conditions *nécessaires* si elles ne sont pas suffisantes.

Prenons par exemple le système : corde-poulie. Les forces extérieures sont : 1° les forces P et Q appliquées aux extrémités de la corde (et non transportées aux points de contact comme on le fait sans nécessité); 2° la

réaction de la chape sur la poulie. D'où l'équation des moments qui donne $P = Q$. Remarquons tout de suite que les frottements de la corde sur la poulie, forces intérieures, n'ont pas à intervenir. Dans le raisonnement qui précède il n'est donc pas nécessaire de les négliger.

La réaction est dirigée suivant la bissectrice des deux directions P, Q, et a pour valeur $2P\cos\alpha$.

Si nous considérons maintenant la chape OI, elle est en équilibre sous l'action de la force précédente appliquée en O et de la réaction du crochet I. Ces deux forces sont opposées. Donc la chape est dirigée suivant la bissectrice des deux directions P et Q.

2. En négligeant toujours les frottements, essayons de faire une théorie plus complète en introduisant les poids de la poulie et de la chape. Supposons même que la poulie ne soit pas exactement centrée au point de vue des masses. Son poids p_1 est appliqué au centre de gravité G distinct de O. On ne manque pas de faire observer que ce poids agit alors comme moteur pendant un demi-tour, comme poids résistant pendant un demi-tour. Or, considérons la poulie seule, et écrivons qu'elle est en équilibre. Les forces extérieures sont les réactions de la corde sur la poulie, de la chape sur la poulie et le poids de la poulie. Comme on néglige les frottements, les réactions sont normales à la surface de la gorge qui est de révolution; elles rencontrent donc l'axe O. Donc, le moment du poids par rapport à O doit être nul, c'est-à-dire que le point G est sur la verticale de O. Cela paraît assez étonnant à première vue et je conseille de faire réfléchir les élèves à ce paradoxe. L'explication en est d'ailleurs aisée : puisqu'on néglige le frottement, la corde n'adhère pas sur la

poulie; celle-ci tend à placer son centre de gravité sur la verticale du point O, et ne rencontre de la part de la corde aucun obstacle à ce déplacement.

Le raisonnement du paragraphe 7 subsiste. On a encore $P = Q$. Leur résultante dirigée suivant leur bissectrice est égale à $2P\cos\alpha$, et ajoutée au poids de la poulie elle fait connaître la réaction R du point O.

Considérons maintenant la chape. Elle est en équilibre sous l'action de trois forces : les deux réactions R au point O, R′ au point fixe I et son poids p_2. La détermination soit géométrique, soit par le calcul de sa position d'équilibre (en considérant comme les données du problème les directions des forces P et Q), est très aisée : dans la figure OHGI, on connaît les directions HG, HI, HO et les longueurs OG, GI. La figure est donc connue en grandeur, et par suite en position puisque la droite indéfinie OH est donnée. Le calcul est intéressant à faire; je me contente de le signaler.

3. On peut également calculer facilement la pression normale de la corde sur la poulie, en la supposant uniformément répartie. Si l'on appelle p la pression par unité d'angle au centre, on trouve qu'elle est égale à P.

II. *On tient compte des frottements.* — 4. Comme je l'ai fait remarquer, pourvu qu'on suppose le centre de gravité de la poulie placé au point O, rien dans ce qui précède ne suppose qu'il faille négliger le frottement de la corde sur la poulie; c'est-à-dire que, tout en tenant compte de ce frottement, la condition d'équilibre reste $P = Q$. Or, l'expérience montre qu'il n'y a pas égalité entre la puissance et la résistance. Il est donc intéressant de chercher à se rendre compte de la véritable cause de ce fait.

Supposons, pour simplifier, la chape supprimée et l'axe de la poulie fixé par deux tourillons O mobiles dans deux coussinets. J'ai déjà remarqué que, pratiquement, si le mouvement a lieu, la poulie tourne, entraînée par la corde, tandis que, si nous négligions le frottement, la corde devrait glisser sur la poulie et celle-ci resterait immobile. Donc, pratiquement, il y a glissement des tourillons dans les coussinets; et il se produit là un frottement dont nous allons tâcher d'apprécier l'importance.

Supposons que, le coussinet étant légèrement plus grand que le tourillon, le contact entre ces deux cylindres ait lieu suivant une seule génératrice, d'ailleurs inconnue. Les réactions de la poulie sur les appuis pourront donc se réduire à une force unique R (s'il y a symétrie) appliquée au point de rencontre de cette génératrice et du plan de symétrie. Supposons que nous soyons dans les conditions ordinaires, c'est-à-dire considérons Q comme donné, et augmentons progressivement P jusqu'au moment où l'équilibre va cesser, en supposant qu'il y a adhérence de la corde; par suite la cessation de l'équilibre sur les tourillons exige que la force unique R précédente ait une composante tangentielle égale à Rf et opposée au mouvement futur, f étant le coefficient de frottement statique tourillon-coussinet. Il est alors facile de faire le calcul. Soit 2α l'angle de P avec Q, β l'angle de R avec la bissectrice de l'angle P, Q. Écrivons les conditions d'équilibre du système corde-poulie; en projetant sur cette bissectrice nous aurons

$$(P + Q)\cos\alpha = R\cos\beta + Rf\sin\beta.$$

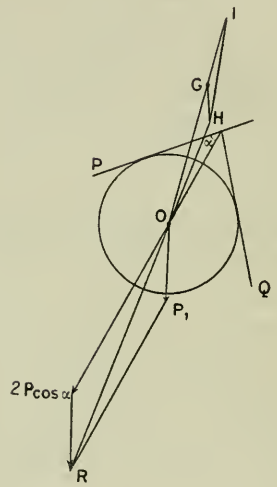
En projetant sur la perpendiculaire

$$(P - Q)\sin\alpha = R\sin\beta - Rf\cos\beta.$$

Et en prenant les moments par rapport à l'axe O

$$(P - Q)r = Rf\rho.$$

Fig. 2.



On résout facilement ce système par rapport à P, β et R. Posons

$$f = \operatorname{tang}\varphi$$

et introduisons l'inconnue

$$\frac{P}{Q} = \lambda,$$

nous aurons

(1) $$\sin(\beta - \varphi) = \frac{\rho}{r}\sin\varphi\sin\alpha.$$

Puis

$$\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} = \operatorname{tang}(\beta - \varphi)\cot\alpha,$$

d'où l'on tire

(2) $$\lambda = \frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}(\beta - \varphi)}{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}(\beta - \varphi)}.$$

Demandons-nous maintenant si, dans les mêmes con-

ditions : Q donné, P croissant, l'équilibre pourrait être rompu par un glissement de la corde. La poulie est alors fixe. Nous sommes dans un cas bien connu, l'équilibre est rompu quand $\frac{P}{Q} = \lambda$ atteint la valeur suivante

$$\lambda' = e^{f'(\pi - 2\alpha)}, \tag{3}$$

f' désignant le coefficient de frottement corde-poulie.

On voit donc qu'il y aura rotation de la poulie et adhérence de la corde si

$$\frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}(\beta - \varphi)}{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}(\beta - \varphi)} < e^{f'(\pi - 2\alpha)}, \tag{4}$$

et, au contraire, il y aurait glissement de la corde si

$$\frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}(\beta - \varphi)}{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}(\beta - \varphi)} > e^{f'(\pi - 2\alpha)}. \tag{5}$$

Il est facile de montrer que *dans les cas usuels* c'est la première inégalité qui est satisfaite.

Prenons par exemple

$$r = 10^{\text{cm}}, \qquad \rho = 2^{\text{cm}},5,$$

donc

$$\frac{\rho}{r} = \frac{1}{4};$$

puis

$$\alpha = 30^\circ \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tang}\varphi = 0,1$$

(métaux lubrifiés).

On trouve aisément $\varphi = 5^\circ 43'$ et $\beta - \varphi = 43'$, puis

$$\lambda = \frac{\sin(\alpha + \beta - \varphi)}{\sin(\alpha - \beta + \varphi)} = 1,04;$$

λ est donc très voisin de l'unité. Calculons au contraire λ'. On a

$$\log\lambda' = f'(\pi - 2\alpha)\log e,$$

d'où l'on tire

$$\lambda' = 3,7 \text{ environ.}$$

Il est intéressant de faire l'expérience et de déterminer le rapport $\frac{P}{Q}$ dans les deux cas. On se placera dans le second en calant la poulie de façon à empêcher sa rotation.

Il est intéressant de montrer également que le rapport $\frac{P}{Q}$ qui produit le roulement est supérieur au nombre trouvé, ce qui montre l'influence de la raideur de la corde qu'on a négligée.

Il est facile de se placer dans des conditions expérimentales telles que l'inégalité (5) ait lieu, au lieu de l'inégalité (4). Il suffira de diminuer le second membre, en remplaçant la corde par une courroie avec un enduit pour diminuer f'. On augmentera le premier membre au contraire en prenant un gros tourillon avec bande de roulement en cuir, en corde ou en bois $\left(\text{ce qui augmente } f \text{ et } \frac{\rho}{r}\right)$. Le coussinet sera également en bois, mouillé de préférence. On peut prendre $\rho = r$. Le coefficient f atteint 0,68. Dans ces conditions, les deux membres de l'inégalité sont sensiblement égaux pour $\alpha = 30^\circ$. En augmentant α, on modifiera peu le premier membre et notablement le second au contraire. On pourra donc voir se produire les deux faits et, en variant les conditions, montrer l'influence des différents facteurs sur le rapport λ.

Remarquons que le premier membre (comme le second) diminue quand α augmente. Sa dérivée a, en effet, le signe de $\rho^2 \sin^2\varphi - r^2$ [1] qui est négatif (au

---

[1] Posons $\beta - \varphi = \theta$ et $\rho \sin\varphi = ra$; on a donc

$$\sin\theta = a \sin\alpha,$$

moins si l'on veut que $\rho \leqq r$). Mais le second membre diminue plus vite.

Remarquons encore que pour $\alpha = 0$, on a $\beta = \varphi$. L'expression (2) de λ n'a plus de sens. Mais on a directement

$$\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} = \rho \frac{\sin \varphi}{r},$$

ce qui permet encore de calculer λ.

CORRESPONDANCE.

M. **E.-N. Barisien**. — *Sur un problème de progressions. Connaissant les sommes* S_1, S_2, S_3 *des termes, des carrés des termes et des cubes des termes d'une progression arithmétique, reconstituer la progression.*

On sait que si a est le premier terme de la progression, r la raison et n le nombre des termes, on a

$$(1) \quad S_1 = n(a - r) + \frac{n(n+1)}{2} r,$$

$$(2) \quad S_2 = n(a - r)^2 + n(n+1) r(a - r) + \frac{r^2}{6} n(n+1)(2n+1),$$

$$(3) \quad S_3 = n(a - r)^3 + \frac{3n(n+1)}{2} r(a - r)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} r^2(a - r) + \frac{n^2(n+1)^2}{4} r^3.$$

---

la dérivée a le signe de

$$\theta' \sin 2\alpha - \sin 2\theta;$$

or on a

$$\cos \theta . \theta' = a \cos \alpha,$$

et la dérivée a le signe de

$$a \cos \alpha \sin 2\alpha - \cos \theta \sin 2\theta,$$

ou de

$$a \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin \theta \cos^2 \theta = a(a^2 - 1) \sin^3 \alpha.$$

Si l'on éliminait a et r ou plutôt $(a - r)$ et r entre ces trois équations, on aurait une équation en n du 16e degré.

Le problème paraît donc *insoluble*.

Voici cependant des formules que nous croyons inédites et qui ramènent le problème au second degré. On trouve les relations

$$(4) \qquad n^2 S_3 - 3n S_1 S_2 + 2 S_1^3 = 0,$$

$$(5) \qquad r^2 n^2 (n^2 - 1) = 12 (n S_2 - S_1^2),$$

$$(6) \qquad a = \frac{S_1}{n} - \frac{r(n-1)}{2}.$$

L'équation (4) qui est du second degré en n a ses deux racines positives, mais on ne prendra que celle qui numériquement donnera un entier. Connaissant n, on aura la raison r par (5), c'est-à-dire

$$r = \frac{2\sqrt{3(n S_2 - S_1^2)}}{n\sqrt{n^2 - 1}}.$$

Et ensuite la relation (6) donnera a en fonction de n et r.

M. **L. Klug**. — Le théorème de la question **2163** (1910, p. 528) a déjà été publié par Steiner. Voir *Journal de Crelle*, t. 30, p. 271-272, ou *Gesammelte Werke*, t. II, p. 342.

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Bordeaux.

Épreuve théorique. — *Une tige homogène* AB *de longueur* $2a$ *se meut dans un plan horizontal et tous ses éléments sont attirés proportionnellement à la masse et à la distance par un point fixe* O *de ce plan. L'extrémité* A *est assujettie à décrire un cercle fixe de centre* O *et de rayon* R *tracé dans le même plan.*

1° *Mouvement de la barre quand le point* A *peut décrire librement le cercle. Cas particulier du repos initial avec* $R = a$. *Construire la trajectoire du milieu de la barre dans ce cas.*

2° *Mouvement de la barre en supposant que* A *soit assujettie à décrire le cercle avec une vitesse angulaire constante* ω *donnée.*

Il n'y a pas de frottements.

Épreuve pratique. — AOB *est une tige pesante homogène pliée en son milieu de façon à former l'angle* θ.

A l'instant initial, le plan AOB *est vertical, le point* O *est immobile et les deux points* A *et* B *ont des vitesses* α *et* β *perpendiculaires à ce plan.*

Le solide étant ainsi lancé, calculer sa force vive, une seconde après l'instant initial. (Juin 1910.)

Caen.

Épreuve théorique. — *Un gyroscope est constitué à l'aide d'un solide de révolution homogène pesant,* S, *dont l'axe* Δ *est supporté à l'aide d'une chape* C. *La chape* C *est un solide homogène pesant constitué par trois grands cercles identiques* C_1, C_2, C_3, *orthogonaux deux à deux et appartenant à une même sphère; l'axe* Δ *est l'intersection des plans des deux cercles* C_1 *et* C_2, *et le centre de gravité de la chape coïncide avec le centre de gravité du gyroscope.*

On imprime au solide S *une rotation initiale* ω *autour de son axe et par rapport à la chape; on pose le gyroscope sans autres vitesses initiales sur un plan horizontal fixe; le contact avec le plan est un point du cercle* C_3, *et ce cercle est maintenu dans un plan vertical par des appuis fixes.*

On accroche en un point du cercle C_3 *un poids* P. *Étudier le mouvement du gyroscope. Indiquer le sens du mouvement relativement au sens de la rotation* ω. *Examiner si l'on peut supprimer les appuis du cercle* C_3.

Épreuve pratique. — *Une plaque pesante est abandonnée sans vitesses initiales sur un plan incliné sur lequel elle glisse sans frottement. A un instant quelconque on place sur la plaque une masse pesante* A, *sans vitesse relativement au plan incliné.*

1° *Le mouvement de la plaque sera-t-il altéré si l'on suppose que la masse* A *peut glisser sans frottement sur cette plaque?*

2° *On suppose la masse* A *liée à la plaque et l'on demande de calculer la perturbation produite dans le mouvement de la plaque.*

On suppose que la masse A *soit infiniment petite par rapport à celle de la plaque et assimilable à un point matériel, et l'on se borne à calculer les parties principales des perturbations.* (Juin 1910.)

Épreuve théorique. — *Un cône* C, *homogène, pesant, de révolution, et dont le demi-angle au sommet est égal à* 45°, *est suspendu par son sommet à un point fixe.*

Le cône C *s'appuie sur un cône fixe identique de même sommet, d'axe vertical, et sur lequel il glisse et tourne sans frottement.*

1° *Déterminer le mouvement du cône* C, *les conditions initiales étant quelconques.*

2° *Le cône* C *étant au repos, on accroche sur ce cône un poids* P, *assimilable à un point; trouver le mouvement que prend le cône* C.

Épreuve pratique. — *Un tube cylindrique, homogène, pesant, et de révolution, repose sur un plan horizontal qu'il touche tout le long d'une génératrice.*

On place à l'intérieur du tube, sans vitesse initiale, un poids P, *assimilable à un point, et dont la masse est égale à celle du tube. Le poids* P *est supposé placé dans une situation infiniment voisine de la génératrice de contact, et dans le plan perpendiculaire à cette génératrice mené par le centre de gravité du tube.*

Calculer approximativement le mouvement que prend le tube sur le plan horizontal et le mouvement du point P *dans le tube. On néglige l'épaisseur du tube et les frottements.* (Novembre 1910.)

Dijon.

Épreuve théorique. — *Équations de Lagrange. Équations canoniques d'Hamilton. Stabilité de l'équilibre. Théorèmes de Lejeune-Dirichlet et de Liapounoff.*

Épreuve pratique. — *Un cylindre circulaire homogène pesant est mobile autour des extrémités de son axe supposé vertical. Ce cylindre porte sur la surface extérieure un*

canal infiniment mince qui a la forme d'une hélice et cette hélice fait deux spires sur le cylindre. On abandonne sans vitesse à la partie supérieure du canal une bille pesante qui le parcourt et tombe. On demande la vitesse de rotation que possède alors le cylindre supposé primitivement immobile.

Données :

Poids du cylindre.....	1^{kg}
Hauteur du cylindre.....	1^{m}
Rayon de base.....	$0^{m},30$
Poids de la bille.....	100^{g}
g.....	$9^{m},81$

(Juillet 1910.)

Grenoble.

Épreuve théorique. — *Un cylindre circulaire droit homogène* S *est posé sur un plan* H *parfaitement poli. Il est soumis à un système de forces données* D.

1° *Former par deux méthodes différentes les équations différentielles du mouvement de* S *lorsque* D *est quelconque.*

2° *Intégrer ces équations dans les deux cas particuliers suivants :*

a. D *est une force constante en grandeur, direction et sens, appliqué au centre* G *de* S;

b. D *est un couple dont le plan est parallèle à* H *et dont le moment est une fonction connue de l'angle* ψ *que fait l'axe* Gz *du cylindre avec un axe* Oy *tracé dans le plan* H.

3° *Exprimer que la section droite de* S *passant par le centre roule et pivote sans glisser sur le plan* H. *Du résultat obtenu déduire les conditions auxquelles le dyname* D *doit satisfaire pour que l'absence de glissement supposée réalisée à l'instant initial persiste pendant tout le mouvement ultérieur.*

Notations : M, *masse du cylindre;*

A = B, C, *moments principaux d'inertie relatifs au centre* G;

ξ, η, R, *coordonnées de* G *par rapport à trois axes* Oξ, Oη, Oζ, *les deux premiers étant situés dans* H;

φ, *angle d'un rayon* Gy *du cylindre avec* Oζ.

On donne D *par les projections* X, Y, Z *de sa résultante*

de translation sur $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ *et par ses moments résultants suivants :* λ *par rapport à* $G\zeta$ *parallèle à* $O\zeta$ *mené par* G, ν *par rapport à* Gz *axe du cylindre,* μ *par rapport à la perpendiculaire commune à ces deux droites.*

Épreuve pratique. — *Dans un plan vertical fixe, un point matériel pesant* M, *de masse* m, *est relié à un point fixe* O *par un fil élastique de masse négligeable. La tension du fil en* M *est supposée proportionnelle à l'excès* $r - l$ *de la longueur* r *du fil sur une longueur fixe* l; *la tension serait d'ailleurs* mk *pour un allongement* $r - l$ *égal à l'unité.*

1° *Déterminer la position d'équilibre.*

2° *Étudier les petites oscillations (au voisinage de cette position d'équilibre).*

3° *Étudier les petites oscillations lorsqu'aux forces précédentes s'ajoute une résistance opposée à la vitesse, proportionnelle à cette vitesse et égale à* $m\alpha$ *pour une vitesse égale à l'unité.*

On désigne par θ *l'angle que fait* OM *avec la verticale descendante.* (Juillet 1910.)

Épreuve théorique. — *Une circonférence homogène peut tourner sans frottement autour d'un de ses diamètres qui est vertical et fixe.*

Un point matériel pesant est mobile sans frottement sur la circonférence.

1° *Former les équations du mouvement du système, indiquer leur intégration, déterminer la réaction exercée par la circonférence sur le point. On ne demande aucune discussion.*

2° *On suppose en second lieu que la circonférence exerce sur le point une résistance opposée à la vitesse du point par rapport à la circonférence et proportionnelle à cette vitesse. Déterminer les équations du mouvement du système et les intégrer dans le cas où le point reste voisin de la position d'équilibre, sa vitesse étant petite.*

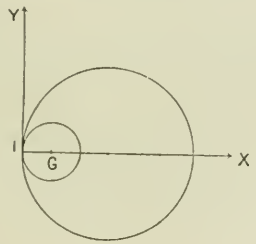
Paramètres : φ, *angle du plan de la circonférence d'un plan vertical fixe;* θ, *angle du rayon aboutissant au point eb de la verticale descendante.*

Épreuve pratique. — *Un cercle homogène de rayon* a,

de masse m, mobile dans un plan horizontal fixe, vient heurter intérieurement une circonférence fixe C *de ce plan, de rayon* $R > a$, *sur laquelle il ne peut que rouler sans glisser. Cette liaison est sans frottement et persiste après le choc.*

Trouver le mouvement suivant le choc, sachant qu'immédiatement avant le choc la vitesse du centre G *du cercle a pour projections* XY *sur le rayon* Ix *et sur la tangente* Iy *à la circonférence* C, *et que la vitesse angulaire de rotation du cercle est* ω.

On demande de trouver aussi la perte de force vive, la



percussion de réaction et la réaction exercée par C *sur le cercle dans le mouvement suivant le choc.*

Application numérique. — Le rayon R *est de* 1^{m}, *le rayon a de* 1^{dm}, *le poids du cercle de* 1^{kg}. *Immédiatement avant le choc, le cercle tourne autour de son centre, la vitesse correspondant à* 100 *tours par minute.*

(Novembre 1910.)

Lille.

Épreuve théorique. — I. *Équations générales du mouvement d'un corps solide, rapportées à des axes mobiles d'une manière quelconque. On examinera successivement le cas où l'origine des axes mobiles est fixe dans le corps, et celui où elle ne l'est pas.*

II. *Appliquer les résultats précédents à la détermination du mouvement d'une sphère homogène pesante à surface parfaitement rugueuse, qui roule sans glisser sur une sphère fixe.*

III *Un cerceau circulaire de masse m est posé sur un sol horizontal; un point matériel de masse $\sqrt{\frac{2}{3}}\,m$ est fixé à l'extrémité d'un rayon horizontal et abandonné sans vitesse. Le coefficient de frottement du cerceau et du sol est $f_0 = \frac{1}{2}$. Le cerceau, initialement, roulera-t-il ou glissera-t-il sur le sol?*

Épreuve pratique. — *Expliquer la règle donnée par Halphen pour déterminer géométriquement les éléments du déplacement hélicoïdal équivalent à deux déplacements hélicoïdaux successifs donnés.*

Exécuter l'épure avec les données suivantes :

Pour le premier déplacement, l'axe A_1 est une verticale ascendante, la rotation est de 30° et se fait de gauche à droite, la translation, descendante, est de 6^{cm}.

Pour le deuxième déplacement, l'axe A_2 est de front, montant vers la droite, incliné de 45° sur A_1, distant de A_1 de 4^{cm}, en avant; la rotation est de 60° et se fait de gauche à droite; la translation, ascendante, est de 6^{cm}.

(*L'épure sera accompagnée d'une légende explicative.*)

(Juillet 1910.)

Épreuve théorique. — I. *Calculer les expressions des composantes de l'accélération d'un point mobile dans l'espace suivant la tangente à la trajectoire et suivant le rayon vecteur allant du point à la projection orthogonale Ω d'une origine fixe O sur le plan osculateur à la trajectoire. Les mettre sous la forme*

$$\frac{rh^2}{p^3\rho} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2p^2}\left(\frac{dh^2}{ds} + \frac{h^2}{p\rho}\,\frac{dq^2}{ds}\right),$$

où ρ est le rayon de courbure, q la distance $O\Omega$, r et p les distances de Ω au point mobile et à la tangente à la trajectoire, h le moment de la vitesse par rapport à Ω et s l'arc de la trajectoire.

II. *Étudier le mouvement d'une toupie sur un plan horizontal parfaitement rugueux, dans les conditions initiales suivantes :*

$$\theta_0 = 60^\circ, \quad \theta'_0 = 0, \quad \varphi'_0 = 2\sqrt{\frac{Pl}{3A}}, \quad \Psi'_0 = \left(3\frac{A}{C} - 1\right)\sqrt{\frac{Pl}{3A}},$$

les composantes de la rotation instantanée étant

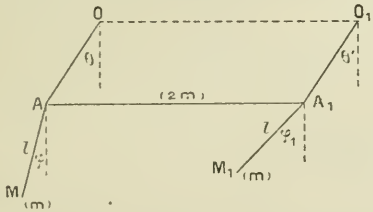
$$p = \theta' \sin \Psi - \varphi' \sin \theta \cos \Psi,$$
$$q = \theta' \cos \Psi + \varphi' \sin \theta \sin \Psi,$$
$$r = \Psi' + \varphi' \cos \theta;$$

P est le poids, l la distance du centre de gravité à la pointe, A et C les moments équatorial et axial relatifs à la pointe.

Après avoir déterminé θ en fonction du temps, on fera le calcul explicite de φ et de Ψ.

Épreuve pratique. — *Une barre homogène* AA_1 *de masse* $2m$ *est suspendue par ses extrémités à deux fils sans masse de même longueur l attachés à deux points fixes* O *et* O_1; *ces deux points* O *et* O_1 *sont au même niveau et l'on a* $OO_1 = AA_1$. *En* A *et* A_1 *sont attachés deux pendules simples* AM *et* A_1M_1 *de même longueur l et de même masse m. L'ensemble est mobile dans un plan vertical.*

Rapporter les petits mouvements de l'ensemble au



système des coordonnées normales *et calculer les périodes des oscillations correspondant à ces coordonnées.*

Prendre $l = 10^m$, $g = 9,808$ m : sec².

(Novembre 1910.)

Lyon.

Épreuve théorique. — *Une barre* AB *homogène, pesante, infiniment mince, est fixée par son extrémité* A *en un point fixe autour duquel elle peut tourner librement. A son autre extrémité* B *est attaché un fil sans masse dont l'autre extrémité* C *est fixe. La droite* AC *des deux points fixes fait un angle quelconque* α *avec l'horizon.*

1° *En supposant* d'abord *le fil inextensible et de longueur*

fixe R, *on demande de trouver le mouvement du système en le supposant placé à l'instant initial dans un plan quelconque* P *passant par* AC, *et lancé à partir de cette position avec une vitesse quelconque, de manière cependant que le fil soit et reste* d'abord *tendu. Discuter.*

2° *En supposant* en second lieu *le fil élastique, l'intensité de la tension du fil aura pour expression* $K^2(r - R)$, *dans laquelle* K^2 *est un coefficient constant de proportionnalité,* R *la longueur du fil non tendu, et* r *la valeur, à l'époque quelconque* t, *que prend cette longueur par suite de la tension à cette époque. On demande de reconnaître si l'équation de d'Alembert et les équations de Lagrange sont encore applicables sous leur forme ordinaire. Dire comment il faut les modifier, et* établir complètement *les équations qui remplacent celles de Lagrange dans ce nouveau cas.*

Épreuve pratique. — *Les côtés adjacents d'un quadrilatère plan et convexe* A_1B_1BA *sont égaux deux à deux et de longueur constante :* $A_1A = AB = c$; $A_1B_1 = B_1B = d$. *Les sommets* A_1 *et* B_1 *restent fixes. Lorsque les angles varient, le côté* AB *se déplace et entraîne dans son mouvement un plan mobile* P *qui glisse sur le plan* P_1 *du quadrilatère.*

1° *Trouver le lieu du centre instantané de rotation dans* P_1 *et dans* P.

2° *Ces deux lieux sont des limaçons de Pascal, ayant respectivement pour points doubles* A_1 *et* B. *Démontrer que si les tangentes au point double sont réelles pour l'un des limaçons, elles sont imaginaires pour l'autre.*

3° *Soit* C *un point du plan* P *invariablement lié à* AB *et soit* T *sa trajectoire sur* P_1. *On trace dans* P *le vecteur* CB' *équipollent à* BB_1 *et l'on construit les triangles* $C_1A_1B_1$ *et* CB'C' *semblables à* CAB *et semblablement orientés. Montrer que lorsque* C *décrit* T *la droite* B'C' *conserve une longueur constante et que ses extrémités se déplacent sur des cercles de même rayon, ayant pour centres les points* B_1 *et* C_1 *du plan fixe.*

4° *Trouver les roulettes du mouvement ainsi défini par le déplacement de* B'C'. (Juillet 1910.)

Épreuve théorique. — *Étant donnée une hélice tracée sur*

un cylindre de révolution d'axe vertical pris pour axe Oz *dirigé vers le haut, on considère la surface* S *engendrée par une* demi-*droite qui se meut de manière que son extrémité restant toujours sur* Oz *auquel elle est constamment perpendiculaire, elle s'appuie en même temps sur l'hélice. Cette surface étant supposée réalisée matériellement, on choisit les axes* Ox *et* Oy *fixes de sorte qu'une surface* Σ *identique à* S *mais fixe et coïncidant avec* S *à l'époque initiale* $t = 0$ *ait pour équations*

$$x = \rho \cos \alpha, \qquad y = \rho \sin \alpha, \qquad z = h\alpha,$$

où ρ *et* α *sont deux paramètres arbitraires, mais* ρ *restant positif ainsi que la constante* h.

Quant à S, *nous la supposons animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de* Oz *en sens contraire de celui des* α *croissants, la valeur* absolue *de la vitesse angulaire étant désignée par* ω. *Cela posé, un point matériel pesant* M *est astreint à se mouvoir sans frottement sur cette surface sur laquelle il est lancé, à* $t = 0$, *dans le sens des* α *croissants et de manière qu'on ait à ce moment*

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega, \qquad \frac{d\rho}{dt} = 0,$$

la position initiale étant donnée par $\alpha = 0$, $\rho = \rho_1 > 0$.

Intégrer autant qu'on le pourra et étudier le mouvement. On appliquera la théorie du mouvement d'un point sur une surface variable.

Épreuve pratique. — *Un point matériel est sollicité par une force variable* F, *parallèle à une direction fixe* D; *il est soumis, en outre, à une résistance* R *dirigée en sens contraire de la vitesse.*

Soit M *la position du point à un instant donné* t, *et soit* MN *la longueur de la corde du cercle de courbure de la trajectoire en* M *menée parallèlement à la direction* D.

1° *Montrer que la vitesse du point* M, *à l'instant* t, *est égale en grandeur à celle qu'il aurait si, partant du repos, il avait parcouru, dans le vide, un chemin égal au quart de* MN, *sous l'action d'une force constante, en grandeur et en direction, et égale à la valeur de* F *à l'instant* t.

2° *La trajectoire étant donnée par son équation* $y = \varphi(x)$,

on demande de déterminer la loi de variation de la résistance R, *en supposant connue la loi* $F = f(x)$ *suivant laquelle varie la force* F. (Novembre 1910.)

Marseille.

Épreuve théorique. — *Une plaque rectangulaire et homogène* OABC *est mobile autour de sa diagonale* OC. *Le point* O *est fixe et la diagonale* OC *est assujettie à rester dans un plan horizontal.*

Étudier le mouvement de ce système.

A l'origine la droite OC *est immobile, la plaque est horizontale et elle tourne autour de* OC *avec une vitesse angulaire* ω_0. *La masse de la plaque est* M. *Le côté* OB *du rectangle est* 2, *le côté* OA *est* $2\sqrt{2}$.

On indique, et il est inutile de le vérifier, que l'ellipsoïde d'inertie de la plaque relativement au point O *est*

$$\frac{M}{9}\left[4x^2 + 32y^2 + 36z^2 - 2\sqrt{2}xy\right] = 1,$$

quand on prend pour axe des x *la diagonale* OC *et pour axe des* y *la perpendiculaire à* OC *menée dans le plan de la plaque du même côté que* OA *par rapport à* OC.

Solution.

Soient trois axes fixes OXYZ dont OZ est vertical et trois axes mobiles dont Oz est normal à la plaque, Ox est suivant la diagonale OC et Oy dans le plan de la plaque.

Soit Ψ l'angle XOx et θ l'angle ZOz.

Le théorème des forces vives donne la relation

$$(1) \qquad 4\theta'^2 + (32 + 4\cos^2\theta)\Psi'^2 - 2\sqrt{2}\theta'\Psi'\sin\theta = 4\omega_0^2.$$

La somme des moments des quantités de mouvement par rapport à l'axe fixe OZ est constante et l'on a

$$(2) \qquad (32 + 4\cos^2\theta)\Psi' - \sqrt{2}\sin\theta.\theta' = 0.$$

De (1) et (2) on tire

$$= \omega_0 \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{\frac{8 + \cos^2\theta}{7 + \cos^2\theta}} \qquad \text{et} \qquad \Psi' = \frac{\sqrt{2}}{4}\,\frac{\sin\theta.\theta'}{8 + \cos^2\theta}.$$

Puisque θ' ne s'annule jamais, la plaque tourne toujours dans le même sens en allant du minimum ω_0 de θ' à son maximum $\omega_0\sqrt{\frac{64}{63}}$, de sorte que la vitesse de rotation autour de OC est presque constante. La durée de la révolution est comprise entre $\frac{2\pi}{\omega_0}$ et $\frac{2\pi}{\omega_0}\sqrt{\frac{63}{64}}$.

Ψ' changeant de signe avec θ, le mouvement de Ox est oscillatoire. On a $\Psi_1 = \frac{1}{4}$ arc tang $\frac{\sqrt{2}}{4}$ = environ 6°, pour l'amplitude. Le maximum de Ψ' (en valeur absolue) a lieu quand la plaque est verticale. Donc Ψ' varie entre o et $\frac{\omega_0}{3\sqrt{56}}$ et, par suite, la plaque tourne autour de OC d'un mouvement presque uniforme et OC oscille autour du point O sans que sa vitesse angulaire dépasse $\frac{\omega_0}{3\sqrt{56}}$ ou environ $\frac{1}{22}\omega_0$ et l'amplitude est d'environ 6°.

Épreuve pratique. — *En un point* O *d'un plan incliné on attache un fil élastique de masse négligeable à l'extrémité duquel on place un point pesant* P. *Construire graphiquement la vitesse et la trajectoire de ce point.*

Le plan fait avec l'horizon un angle dont le sinus est 0,2. *La longueur du fil à l'état naturel est de* 10^{cm}.

A l'origine du temps le point P *est sans vitesse, le fil est horizontal et il n'est pas tendu.*

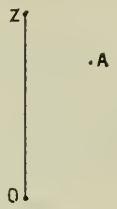
Le fil s'allonge proportionnellement à sa tension et il doublerait de longueur sous l'action d'une tension égale au poids du point P.

On fera deux dessins sur deux feuilles séparées avec des intervalles de temps égaux pour l'un à $\frac{1}{10}$ *de seconde et pour l'autre à* $\frac{1}{20}$. *On se bornera à une oscillation simple.*

(Juin 1910.)

Épreuve théorique. — *Un plan vertical* zOA *tourne autour de la verticale* Oz *avec une vitesse constante* ω. *Autour du point fixe* A, *et dans le plan* zOA, *peut tourner une plaque rectangulaire homogène dont le centre de gravité est en* A.

1° *Trouver les positions d'équilibre relatif de la plaque et examiner si elles sont stables ou instables.*



2° *Étudier le mouvement de la plaque en supposant qu'à l'origine des temps la plaque ait son grand côté horizontal et qu'elle ait, dans le plan* zOA, *une vitesse relative égale à*

$$\omega\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}},$$

en appelant a et b les longueurs des côtés.

SOLUTION.

Prenons pour Ax et Ay les axes de symétrie de la plaque et pour Ax_1 et Ay_1 des axes, l'un horizontal, l'autre vertical, dans le plan zOA. Nous aurons, pour un angle θ entre ces axes,

$$x_1 = x\cos\theta - y\sin\theta.$$

Aux forces réelles, ajoutons la force d'entraînement et la force centrifuge composée, toutes deux changées de signes. La dernière, normale au plan zOA, n'interviendra ni dans l'équilibre ni dans le mouvement. Soit d la distance de A à Oz. La force d'entraînement pour un point est $m\omega^2 d + m\omega^2 x_1$. Les forces $m\omega^2 d$ ont une résultante passant en A qui est fixe. Il suffit d'exprimer que la somme des moments des forces $m\omega^2 x_1$ par rapport à A est nulle. On obtient

$$-\omega^2\sin\theta\cos\theta\,M\frac{a^2-b^2}{3} = 0.$$

Donc pour l'équilibre, il faut $\theta = 0$ ou $\theta = \frac{\pi}{2}$. Si l'on prend θ très petit et si l'on a $a > b$, le signe de la somme des moments

montre que $\theta = 0$ correspond à la stabilité. De même $\theta = \frac{\pi}{2}$ correspond à l'instabilité.

Pour étudier le mouvement, le théorème des forces vives donne

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}} \cos\theta,$$

en tenant compte des conditions initiales. On voit que θ croît à partir de zéro et tend vers $\frac{\pi}{2}$ en mettant un temps infini.

Épreuve pratique. — *Un point de masse μ est soumis à l'action d'une force constante en grandeur, mais variable en direction. La grandeur de la force est égale à* 144 *dans le système C. G. S. La direction de la force varie uniformément et fait un tour par seconde. La vitesse initiale du point est nulle.*

Donner, pendant une seconde, par un graphique approximatif et sans aucun calcul, la représentation de l'hodographe et celle de la trajectoire du point en prenant des intervalles de temps égaux à $\frac{1}{12}$ de seconde.

On expliquera le dessin dans une copie.

(Octobre 1910.)

Montpellier.

Épreuve théorique. — *La base inférieure d'un cylindre de révolution, homogène et pesant, peut se déplacer sans frottement sur un plan horizontal fixe. Le rayon de base et la hauteur du cylindre sont égaux à* 1^m. *Sur la surface latérale du cylindre est fixé un tube creux, de section infiniment petite, dans l'intérieur duquel peut glisser sans frottement un point* M *ayant même poids que le cylindre. Le tube a la forme d'un arc d'hélice ayant pour origine un point* A *de la base inférieure du cylindre, et pour extrémité un point* B *de la base supérieure; les méridiens du cylindre qui passent par* A *et* B *sont rectangulaires; un mobile qui décrirait l'arc* AB, *en se dirigeant de* A *vers* B, *tournerait dans le sens direct autour de la verticale ascendante dirigée suivant l'axe du cylindre.*

Le cylindre étant au repos, le point M *est abandonné sans vitesse en* B, *dans le tube.*

1° *Calculer le temps que mettra le point* M *pour arriver en* A.

2° *Déterminer le déplacement du cylindre pendant le même temps.*

Épreuve pratique (Mécanique). — *Une plaque de fer infiniment mince et homogène a la forme d'un segment de cercle. Le rayon du cercle et la corde du segment sont égaux à* 1^m. *La densité du fer est* 7,6

Calculer le moment d'inertie de la plaque par rapport au centre du cercle. (Juillet 1910.)

Épreuve théorique. — *Une plaque circulaire infiniment mince, homogène et pesante, est invariablement liée à une tige rectiligne dépourvue de masse, qui est perpendiculaire à son plan et passe par son centre. Le solide ainsi constitué est mobile autour d'un point fixe situé sur la tige.*

1° *Établir les équations du mouvement, les conditions initiales étant quelconques.*

2° *Étudier le mouvement dans le cas particulier où, à l'époque initiale, la tige est immobile, tandis que le solide tourne autour de cette tige avec une vitesse angulaire donnée* ω.

Épreuve pratique. — *Une barre rectiligne, homogène et pesante, faisant avec l'horizon l'angle* θ, *est abandonnée sans vitesses initiales dans un plan vertical fixe. Lorsque l'extrémité inférieure de la barre vient choquer un plan horizontal fixe, le centre de gravité est animé de la vitesse* v. *La barre et le plan horizontal sont parfaitement élastiques.*

Quelle valeur faut-il donner à l'angle θ *pour que la valeur de la vitesse angulaire de la barre immédiatement après le choc soit maximum?*

Quel est, lorsque θ *a cette valeur, le mouvement initial de la barre après le choc?* (Novembre 1910.)

Poitiers.

Épreuve théorique. — I. *Un disque circulaire homogène posé sur un plan incliné* P *descend le long d'une ligne de plus grande pente de ce plan sous l'influence de son poids.*

On suppose que le plan est assez rugueux pour empêcher tout glissement du disque. Le roulement du disque s'effectuant dans un plan vertical, montrer que l'accélération de son centre est égal aux $\frac{2}{3}$ *de l'accélération que prendrait un point matériel glissant* sans frottement *le long d'une ligne de plus grande pente d'un plan parallèle au plan* P.

On négligera le frottement de roulement.

II. *La partie supérieure d'une courroie sans fin flexible, inextensible et d'épaisseur négligeable, repose sur un cylindre de révolution à axe horizontal, tandis que l'autre partie pend librement. On suppose la courroie en équilibre dans un plan vertical perpendiculaire à l'axe du cylindre et l'on donne le rayon* R *du cylindre ainsi que l'angle* φ *de la verticale avec le rayon du cylindre qui aboutit à l'un des points* A, B *où la courroie entre en contact avec le cylindre.*

On demande de calculer :

1° *La longueur de la courroie ;*

2° *La distance* OD *de l'axe du cylindre au point le plus bas* D *de la courroie.*

Épreuve pratique. — *Une tige homogène cylindrique pesante de masse* m *et de longueur* $2a$ *effectue de petites oscillations autour de son extrémité* A. *Soit* T *la durée d'une oscillation double.*

On soude à l'autre extrémité B *et de façon que les axes coïncident une autre tige homogène pesante de masse* m' *et de longueur* $2b$. *Soit* T′ *la durée d'une oscillation double du pendule ainsi constitué.*

Calculer le rapport $\frac{T' - T}{T}$ *de l'accroissement de la période à la période primitive.*

En donner une explication simplifiée quand m' *est petit par rapport à* m.

Faire le calcul et se rendre compte de l'approximation obtenue quand

$$m = 500^{g}; \qquad m' = 10^{g};$$
$$2a = 100^{cm}; \qquad 2b = 20^{cm}.$$

(Juillet 1910.)

Rennes.

Épreuve théorique. — I. *Équilibre et mouvement relatifs à la surface de la Terre.*

II. *Une barre horizontale* AB *tourne uniformément autour de la verticale* Az *du point* A *avec une vitesse angulaire* ω. *Une seconde barre* BC, *homogène et pesante est articulée en* B *avec la première. Étudier sommairement le mouvement relatif de cette seconde barre, qui reste constamment dans le plan* BAz. *On suppose qu'il n'y a pas de frottement. Déterminer les positions d'équilibre relatif en distinguant l'équilibre stable de l'équilibre instable. Étudier les mouvements infiniment petits dans les différentes hypothèses. Calculer la réaction en* B.

La densité linéaire de la barre BC *est égale à l'unité.*

On posera $AB = a$, $BC = b$, *et l'on désignera par* θ *l'angle de* BC *avec la verticale descendante.*

Épreuve pratique. — *Un disque circulaire vertical non homogène est assujetti à rouler sans glisser sur une horizontale. Déterminer la durée des petites oscillations du disque dans le voisinage de la position d'équilibre stable.* (Juin 1910.)

Épreuve théorique. — I. *Équilibre d'un milieu continu déformable. Répartition des efforts. Équations générales de l'équilibre.*

II. *On considère une chaîne pesante, homogène, parfaitement flexible, de grosseur négligeable. Cette chaîne est disposée sur une table horizontale de façon qu'une partie* AB *pende verticalement et que la partie horizontale* BC *soit rectiligne et perpendiculaire au bord de la table. Cette partie horizontale glissant sur la table éprouve un frottement proportionnel à la pression normale.*

1° *Établir les conditions d'équilibre.*

2° *Étudier le mouvement quand il a lieu, en supposant que la partie horizontale glisse dans sa direction et que la portion pendante reste verticale.*

3° *Calculer dans le cas du mouvement comme dans celui de l'équilibre la tension de la chaîne en chacun de ses points.*

Nota. — *En* B *le profil du bord de la table est arrondi suivant un quart de cercle de rayon très petit. On supposera d'abord le frottement nul sur la portion arrondie, et l'on examinera ensuite les modifications à introduire dans les formules pour le cas où le coefficient de frottement sur cette portion serait le même que sur la partie horizontale de la table.*

Épreuve pratique. — *Moment d'inertie de la section droite d'une poutrelle en acier en* I *par rapport à l'axe perpendiculaire à la lame, passant par le centre de gravité.*

Dimensions en millimètres $\frac{156 \times 254}{15 \times 12}$.

Le moment d'inertie sera exprimé en centimètres carrés.

(Novembre 1910.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2154.

(1910, p. 240.)

On donne un cercle C *de centre* O *et de rayon* R *et un point fixe* A, *tel que* $OA = \frac{R}{\sqrt{2}}$. *On considère toutes les ellipses qui ont le cercle* C *pour cercle orthoptique et qui passent par* A.

Montrer que :

1° *Ces ellipses enveloppent une ellipse ;*

2° *Le lieu de leurs sommets se compose de deux cercles ;*

3° *Le lieu de leurs foyers se compose de deux lemniscates de Bernoulli.*

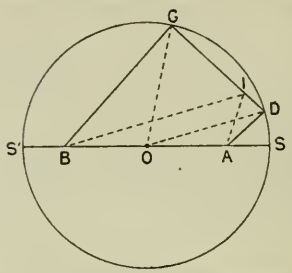
E.-N. Barisien.

SOLUTION,

Par M. L. Klug.

1° Soient B le symétrique de A par rapport à O, S et S′ les points de rencontre de AB avec le cercle donné. Soit encore AD la tangente en A à l'une des ellipses variables considérées (E). Cette ellipse passe en B et sa tangente en ce point est BG parallèle à AD. En outre, si AD et BG rencontrent respectivement en D et G le cercle donné, DG est perpendiculaire à AD et BG. DG est donc tangente à l'ellipse (E),

puisque le cercle donné est son cercle orthoptique. Si I est le point de contact, OG doit passer par le milieu de BI. OG est



donc parallèle à AI; de même OD est parallèle à BI. On voit donc que l'ellipse (E) touche au point I, l'ellipse fixe ayant pour foyers A et B et pour grand axe SS'. C'est l'enveloppe cherchée.

2° Soit x la longueur du demi-diamètre de (E), conjugué de AB. On a, par le théorème d'Apollonius,

$$x^2 + \overline{OA}^2 = \text{somme des carrés des demi-axes de (E)}$$
$$= R^2 = 2\overline{OA}^2,$$

d'où

$$x = OA.$$

Ainsi AB est un des deux diamètres conjugués égaux de (E). Soient alors M un des sommets de cette ellipse, φ l'angle que fait OM avec OA. Si ON est un demi-axe perpendiculaire à OM, on doit avoir

$$\overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 = R^2,$$
$$\frac{OM}{ON} = \pm \operatorname{tang}\varphi,$$

d'où

$$OM = \pm R.\cos\varphi, \qquad ON = \pm R \sin\varphi.$$

Les points M et N décrivent donc les deux cercles ayant pour diamètres OS et OS'.

3° Soit F un foyer de (E), supposons-le porté par l'axe OM. On a

$$\overline{OF}^2 = \overline{OM}^2 - \overline{ON}^2 = R^2 \cos 2\varphi;$$

ce qui montre que le point F décrit une lemniscate de Bernoulli, de foyers A et A'.

Autres solutions par MM. Abramescu, R. Bouvaist et H. Lez.

[L'10b]

RECHERCHES GÉOMÉTRIQUES SUR LES NORMALES A UNE PARABOLE ISSUES D'UN MÊME POINT;

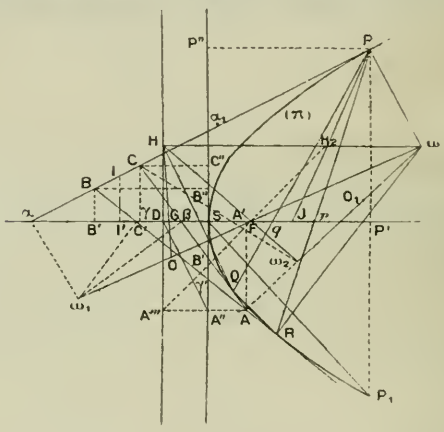
PAR M. J. PLANE.

Dans cette Note, à laquelle j'ai été amené par la recherche d'une solution géométrique de questions proposées dernièrement, sur ce sujet, dans les *Nouvelles Annales*, je me propose surtout de faire une étude d'ensemble sur les propriétés des triangles inscrits et circonscrits à une parabole aux trois pieds des normales issues d'un même point. Ceci m'a conduit, dans les débuts du travail tout au moins, à retrouver un certain nombre de propriétés bien connues (dues à Steiner entre autres). Aussi dans l'impossibilité où je suis de citer les noms de tous les auteurs originaux je prie le lecteur de considérer bien moins la nouveauté des propriétés que j'établis que celle des démonstrations.

Pour faciliter la lecture de cette Note, je me suis efforcé de conserver toujours les mêmes notations. Je désignerai en particulier par ωP, ωQ, ωR les normales issues d'un point ω à une parabole (H), par ABC le triangle circonscrit à (H) aux points P, Q, R; α, β, γ; α_1, β_1, γ_1 les points où ses côtés coupent l'axe et la tangente au sommet de (H), et d'une façon générale par K', K'', K''' les projections d'un point quelconque K sur l'axe, la tangente au sommet et la directrice de (H).

1. Triangle circonscrit. — 1. Les symétriques des normales ωP, ωQ, ωR par rapport au foyer F de (H) sont les perpendiculaires élevées de α, β, γ aux côtés BC, CA, AB (*fig.* 1). Elles se coupent en ω_1 symé-

Fig. 1.



trique de ω par rapport à F. ω_1 est par suite sur le cercle circonscrit à ABC, la droite de Simpson correspondante étant l'axe de (H). Mais le foyer F est aussi sur ce cercle, la droite de Simpson correspondante étant la tangente au sommet.

Ces deux droites sont rectangulaires, d'après une propriété connue et d'ailleurs facile à établir géométriquement; F et ω_1 sont donc diamétralement opposés sur le cercle circonscrit; par suite :

Le centre O *du cercle circonscrit à* ABC *est l'homologue du point* ω *dans une homothétie de centre* F *et de rapport* $-\frac{1}{2}$. *Son rayon est* OF.

2. Une droite de Simpson est équidistante de l'orthocentre et du point qui lui a donné naissance; donc :

L'orthocentre H *du triangle* ABC *est le pied sur la directrice du diamètre de* (H) *passant par* ω.

3. La droite OH coupe l'axe en un point G tel que

$$\frac{OG}{OH} = \frac{OF}{O\omega} = \frac{1}{3};$$

donc :

Le centre de gravité G *du triangle* ABC *est sur l'axe.*

On sait que la distance du centre de gravité G d'un triangle à une droite est le tiers de la somme algébrique des distances des trois sommets à la même droite, donc :

La somme algébrique des distances des points A, B, C *à l'axe est nulle.*

4. La première proposition énoncée nous montre que :

Les médiatrices du triangle ABC *restent, quand* ω *varie, normales à une même parabole* (H_1), *homothétique de* (H) *par rapport au foyer, le rapport d'homothétie étant* $-\frac{1}{2}$.

5. Elle nous montre encore immédiatement que :

Le milieu I *de* BC *est fixe lorsque* ω *décrit la normale* ωP, *c'est le milieu de* xx_1.

On en conclut que si, avec les axes ordinaires, les coordonnées de P sont (x, y) celles du point I sont

$$x' = -\frac{x}{2}, \qquad y' = \frac{y}{4},$$

et comme

$$y^2 = 2px,$$

on en tire

$$y'^2 = -\frac{2p}{8}x',$$

et par suite :

Le lieu des milieux des côtés du triangle ABC *lorsque* ω *varie est une parabole* (Π_2) *déduite de* (Π) *par homothétie par rapport au sommet* S *et dans le rapport* $-\frac{1}{8}$.

6. Les milieux des côtés BC, CA, AB coïncident respectivement avec ceux des segments $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$, donc, en vertu d'une propriété bien connue :

A, B, C *et par suite* H *sont sur une hyperbole équilatère* (H) *ayant l'axe et la tangente au sommet pour asymptotes.*

(Je dois cette démonstration, plus simple que celle que j'avais d'abord fournie, à l'amabilité de M. Bricard qui a bien voulu me faire l'honneur de revoir mon travail.)

Le centre de cette hyperbole (H) est le sommet S de (Π), donc :

Le cercle des neuf points du triangle ABC *passe par le sommet* S *de la parabole* (Π).

II. Triangle inscrit. — 7. Le milieu de QR et le point A sont sur une parallèle à l'axe, donc

$$\Sigma PP' = \Sigma AA';$$

d'où :

La droite qui joint les centres de gravité de deux triangles inscrits et circonscrits à une parabole aux mêmes points est parallèle à l'axe.

En particulier :

Le centre de gravité G_1 *du triangle* PQR *est sur l'axe.*

Il y a mieux, on a

$$PP'' = S\alpha = -(CC'' + BB''),$$

donc

$$\Sigma PP'' = -2\Sigma AA''$$

et

$$SG_1 = -2SG.$$

Le centre de gravité G_1 *du triangle* PQR *est homothétique par rapport au sommet* S *et dans le rapport* -2 *du centre de gravité* G *du triangle* ABC.

8. On a

$$QQ' + RR' = -PP' = P_1P',$$

P_1 étant symétrique de P par rapport à l'axe.

Les milieux de SP_1 et de QR sont sur un même diamètre, SP_1 et QR sont donc parallèles, autrement dit SP et QR sont antiparallèles par rapport à l'axe et, d'après une propriété connue, le quadrilatère PQRS est inscriptible.

Le cercle circonscrit au triangle PQR *passe par le sommet.*

9. Proposons-nous de chercher son centre O_1.

Ce cercle et le cercle de diamètre $A\omega$ ont pour axe radical QR. O_1 est donc le milieu du segment qui joint ω au point de rencontre ω_2 des perpendiculaires abaissées de A, B, C sur leurs polaires.

Mais $A\omega_2$ par exemple est parallèle à FA'''. En effet FA''' est perpendiculaire à la tangente à (H) au pied sur cette courbe du diamètre passant par A.

De plus AH, parallèle à $F\alpha_1$, est parallèle à DA'', D étant le pied de la directrice; donc (*fig.* 1)

$$\frac{AA'''}{HA''} = \frac{A''A'''}{DA'''}, \qquad \frac{HH_2}{HA'''} = \frac{DF}{DA'''},$$

d'où

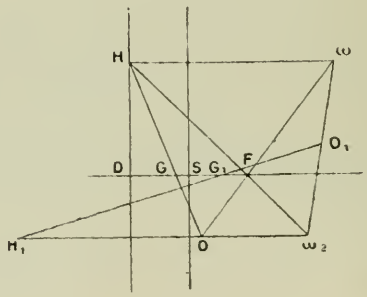
$$HH_2 = 2AA''.$$

L'homothétique de $A\omega_2$ par rapport au foyer et dans le rapport -2 passe par H; donc (*fig.* 1) :

Le centre O_1 *du cercle circonscrit à* PQR *est le milieu du segment* $\omega\,\omega_2$, ω_2 *étant homothétique de* H *par rapport à* F $\left(\textit{rapport } -\frac{1}{2}\right)$. *Son rayon est* O_1S.

10. Connaissant ω on saura donc construire d'une façon très simple les points O, G, H, O_1, G_1 et par suite aussi l'orthocentre H_1 de PQR.

Fig. 2.



Ces constructions se résument dans la figure 1 où

$$\overline{F\omega} + 2\overline{FO} = 0, \qquad \overline{FH} + 2\overline{F\omega_2} = 0,$$
$$\overline{GH} + 2\overline{GO} = 0, \qquad \overline{G_1H_1} + 2\overline{G_1O_1} = 0,$$
$$\overline{SG_1} + 2\overline{SG} = 0;$$

O, H_1 et ω_2 sont sur une même parallèle à l'axe.

11. Le paragraphe 5 a un corrélatif qu'il suffit de citer :

Les côtés PQ, PR *découpent sur l'axe de la parabole un segment qr dont le milieu* J *est fixe quand* ω *décrit* ωP. *C'est le milieu* J *de* SP'. *L'enveloppe de* PJ *quand* P *varie est une parabole* (Π'_2).

On peut ajouter que :

Quand ω décrit ωP, QR antiparallèle à SP se déplace parallèlement à lui-même.

III. Applications. — 12. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un triangle inscrit (ou circonscrit) à une parabole* (II) *soit tel que les normales à* (II) *aux sommets (ou aux points de contact) soient concourantes est que son centre de gravité soit sur l'axe.*

En effet considérons simultanément les triangles ABC et PQR circonscrit et inscrit à (II) aux mêmes points P, Q, R. Si le centre de gravité G de ABC est sur l'axe, celui G_1 de PQR y est aussi (§ 7) et réciproquement.

En conservant les notations de la figure 1 on a donc

$$2H' = BB' + CC' = -AA' = -\frac{QQ' + RR'}{2} = \frac{PP'}{2} = \alpha_1 S.$$

I est donc le milieu de $\alpha\alpha_1$ et, si O est le centre du cercle circonscrit à ABC, les normales à (II) aux points P, Q, R concourent en ω sur OF tel que $O\omega = 3OF$.

Cette condition nécessaire est donc aussi suffisante.

13. Le foyer F n'est évidemment pas un point quelconque du cercle circonscrit à ABC.

Proposons-nous de rechercher quelles sont les paraboles inscrites dans un triangle donnée ABC et telles que les normales aux points de contact soient concourantes.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que l'axe de la parabole passe par le centre de gravité G de ABC.

Soit F le foyer d'une telle parabole (*fig.* 3).

Le théorème de Poncelet nous indique que

$$\widehat{FAC} = \widehat{BAG'}.$$

Mais

$$\widehat{FAG} = \widehat{FAC} + \widehat{CAG},$$

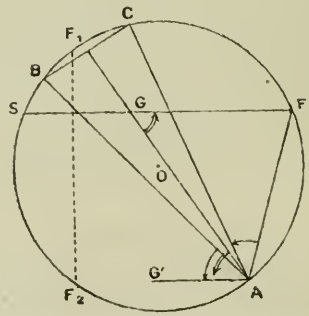
$$\widehat{AGF} = \widehat{GAG'} = GAB + \widehat{BAG'} = \widehat{FAC} + \widehat{GAB}$$

en grandeur et sens, donc

$$\widehat{FAG} - \widehat{AGF} = \widehat{CAG} - \widehat{GAB} = \text{const.}$$

Le point F se trouve donc sur une hyperbole équila-

Fig. 3.



tère de diamètre AG, le diamètre conjugué faisant avec AG un angle égal à $\widehat{CAG} - \widehat{GAB}$. La tangente en A est donc la symédiane du triangle ABC.

Cette hyperbole est donc bien déterminée, elle coupe le cercle circonscrit à ABC en trois points F, F_1, F_2 autres que A et qui répondent à la question. Ces points sont évidemment sur les hyperboles analogues passant par B et C; donc :

Étant donnés un triangle ABC *et* G *son centre de gravité, les hyperboles équilatères ayant pour diamètres* AG, BG, CG *et tangentes respectivement en*

A, B, C *aux symédianes de* ABC, *font partie d'un même faisceau dont les sommets autres que* G *sont sur le cercle circonscrit.*

Ces sommets F, F_1, F_2 *sont les foyers des trois seules paraboles inscrites dans* ABC *et telles que les normales aux points de contact soient concourantes.*

Les points F, F_1, F_2, G *forment un groupe orthocentrique;* G *est par suite l'orthocentre du triangle* FF_1F_2.

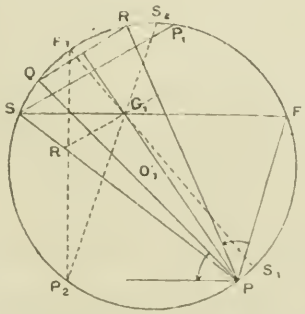
Cette dernière partie permet de construire facilement F_1F_2 connaissant F et ABC. Si S est le deuxième point de rencontre de FG avec le cercle circonscrit à ABC, F_1F_2 est perpendiculaire au milieu de GS.

14. La même question se pose dans le cas des triangles inscrits :

Quelles sont les paraboles circonscrites à un triangle donné PQR et telles que les normales en P, Q, R soient concourantes.

Nous rechercherons les sommets de ces paraboles.

Fig. 4.



Soit S un tel sommet (*fig.* 4), il est sur le cercle circonscrit à PQR et une de ses propriétés caractéris-

tiques est que SG_1 (axe de la parabole) est bissectrice de l'angle $\widehat{PSP_1}$, SP_1 étant parallèle à QR.

Soit F le point où SG_1 coupe le cercle circonscrit.

Par hypothèse

$$\widehat{PF} = \widehat{FP_1}.$$

mais

$$\widehat{SQ} = \widehat{RP_1},$$

donc

$$\widehat{PF} - \widehat{SQ} = \widehat{FR} \qquad \text{ou} \qquad \widehat{PQ, FG_1} = \widehat{PF, PR}.$$

F est donc le foyer d'une parabole inscrite dans PQR et telles que les normales aux points de contact soient concourantes : c'est l'un des points F, F_1, F_2 du paragraphe précédent; d'où :

Étant donné un triangle PQR *il existe trois paraboles et trois seulement circonscrites à* PQR *et telles que les normales en* P, Q, R *soient concourantes; leurs trois sommets* S, S_1, S_2 *sont sur le cercle circonscrit à* PQR. *Ce sont les inverses des points* F, F_1, F_2 *dans l'inversion de centre* G_1 *qui transforme ce cercle en lui-même. Le triangle qu'ils forment a donc le point* G_1 *pour centre du cercle inscrit.*

Remarquons d'ailleurs que si R est le rayon du cercle circonscrit à PQR, O_1 son centre, le rayon r du cercle inscrit à SS_1S_2 est donné par la relation d'Euler

$$\overline{O_1G_1}^2 = R^2 - 2Rr.$$

15. On aurait pu arriver au même résultat d'une autre façon.

Soit S un des sommets cherchés. Menons par G_1 la parallèle à QR qui coupe SP en K. SG_1 étant bissectrice de $\widehat{PSP_1}$ le triangle SKG_1 est isocèle. S se trouve

donc sur une strophoïde de pôle P, de point double G_1 ayant pour directrice la parallèle à QR menée par G_1. Tout point de rencontre de cette strophoïde et du cercle circonscrit (autre que P et les points cycliques) est d'ailleurs un point S cherché. Il y a donc trois sommets S, S_1, S_2, situés sur le cercle circonscrit et sur trois strophoïdes analogues à la précédente.

D'ailleurs :

Le triangle formé par les trois points de rencontre de deux strophoïdes ayant même point double a ce point double pour centre du cercle inscrit.

Il suffit pour le voir de transformer par inversion par rapport au point double commun. Les deux strophoïdes se transforment en hyperboles équilatères et le triangle transformé a le point double comme orthocentre.

16. Problème. — *Construire les trois normales à une parabole* (II) *donnée, issues d'un point donné* ω, *connaissant l'une d'elles.*

Les résultats précédents nous permettent d'en donner une solution très simple.

Soit ωP la normale connue (*fig.* 1). On a immédiatement un côté PBC du triangle circonscrit. On a aussi le cercle circonscrit à ce triangle, d'où deux sommets B et C, les normales inconnues sont donc les normales à (II) aux points de contact de (II) avec les tangentes issues de B et C.

Cette construction n'est possible que si OF > OI.

Si OI = OF, B et C sont confondus en I, le troisième sommet A est sur (II) et confondu avec Q et R, ω est alors le centre de courbure de la parabole en A.

17. Dans ce cas nous voyons (*fig.* 5) que :

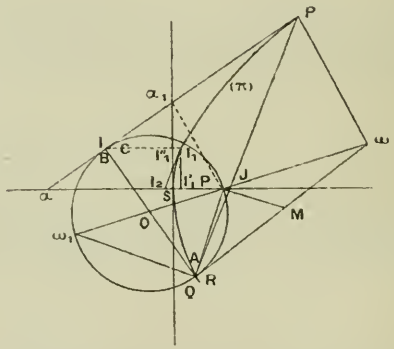
Étant donnés une tangente $P\alpha\alpha_1$ quelconque à la parabole, I le milieu de $\alpha\alpha_1$, PQ sa polaire :

Le cercle circonscrit à QFI est tangent en I à $P\alpha\alpha_1$;

Le cercle circonscrit à PQS est tangent en Q à (Π);

Le point de rencontre ω des normales en P et Q à (Π) est le centre de courbure de cette courbe en Q.

Fig. 5.



On peut en déduire la construction bien connue du centre de courbure ω en un point Q d'une parabole.

En effet si ω_1 est symétrique de ω par rapport à F, il est sur le cercle circonscrit à QFI et diamétralement opposé de F, FQ est donc perpendiculaire sur $Q\omega_1$; d'où :

Le centre de courbure ω *en un point* Q *d'une parabole s'obtient en menant par le foyer* F *la perpendiculaire à* QF *qui coupe la normale en* Q *au milieu* M *de* Qω.

18. La droite PQ est d'ailleurs la polaire de I par rapport à (Π) mais d'autre part le lieu de I est une parabole (Π_2) (§ 5), l'enveloppe de sa polaire est une

parabole (Π'_2) et en considérant des points particuliers on voit que :

L'enveloppe des cordes joignant les pieds des normales à une parabole (Π) *issues des différents points de sa développée est une parabole* (Π_2) *homothétique de* (Π) *par rapport au sommet* S *le rapport d'homothétie étant* -8.

On peut d'ailleurs établir directement cette proposition.

Si I_1 est le pied sur (Π) du diamètre passant par I (*fig.* 5) on a

$$I_1 I'_1 = \Pi' = \frac{PP'}{4}.$$

Dans une parabole

$$\frac{I_1 I'_1}{I_1 I'_1} = \text{const.};$$

donc

$$SI'_1 = \frac{SP'}{16},$$

mais

$$SI'_1 = -SI_2, \qquad SP' = 2SJ;$$

donc

$$SJ = -8SI_2.$$

PQ enveloppe donc bien la parabole (Π_2) annoncée.

19. On a vu d'une façon générale (§ 12) que $AA' = S\alpha_1$. Ici on a donc

$$QQ' = S\alpha_1 = -\frac{PP'}{2}.$$

Soient p, q, r les centres de courbure de (Π) en P, Q, R; pP_1, qQ_1, rR_1 les deuxièmes normales à la parabole issues de p, q, r; on a

$$P_1 P'_1 = -\frac{PP'}{2};$$

donc

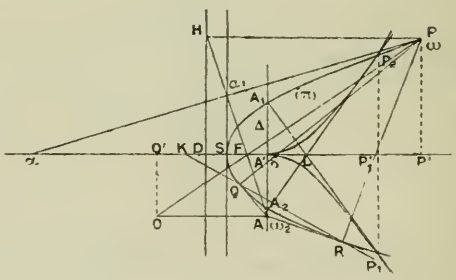
$$\Sigma P_1 P'_1 = -\frac{1}{2}\Sigma PP' = 0.$$

Le centre de gravité du triangle $P_1 Q_1 R_1$ est donc sur l'axe; par suite :

Les secondes normales à (Π) *issues des centres de courbure de cette courbe en* P, Q, R *concourent en un même point.*

20. Comme cas particulier du problème résolu au paragraphe 16 on voit qu'on saura toujours construire

Fig. 6.



les normales à (Π) issues d'un point de cette courbe.

Dans ce cas P est confondu avec ω (*fig.* 6) et

$$AA' = S\alpha_1 = -\frac{PP'}{2} = \frac{HD}{2} = OO';$$

OA est donc parallèle à l'axe; de plus

$$OA = OF = \frac{FP}{2} = \frac{HP}{2},$$

H, F, A sont donc en ligne droite et $\overline{FH} + 2\overline{FA} = 0$.

A est alors confondu avec le point ω_2 (§ 9) le cercle circonscrit à PQR a pour diamètre PA.

Il y a mieux : quand ω varie, A décrit comme ω_2 la

symétrique Δ de la tangente au sommet par rapport au foyer, mais c'est le pôle de QR ; QR passe donc par un point fixe K pôle de Δ.

Les cordes joignant les pieds des normales à une parabole issues d'un point de cette courbe passent par un point fixe K *symétrique du sommet* S *par rapport au pied* D *de la directrice.*

21. Ceci nous permet de trouver les points de rencontre d'une parabole (Π) et de sa développée.

P sera centre de courbure si Q, R, A sont confondus sur (Π). Les points cherchés P_1 P_2 sont donc ceux situés sur les normales à (Π) aux points où celle-ci est coupée par Δ. Le pied δ de Δ sur l'axe est d'ailleurs le centre de courbure au sommet S, de plus les tangentes à la développée en P_1 P_2 sont $P_1 A_1$, $P_2 A_2$ (*fig.* 6).

Si $SD = p$, on a

$$S\delta = p, \qquad SL = 2p,$$

et comme

$$P_1 P'_1 = 2 A_1 A'_1, \qquad SP'_1 = 4p,$$

Ces résultats sont bien connus.

IV. Correspondance [ω ; A, B, C]. — 22. Les résultats qui précèdent permettent d'établir entre les points du plan considérés comme points ω et les points A, B, C ou les côtés QR, RP, PQ correspondants, une correspondance (1, 3) jouant pour les normales le rôle de la théorie des pôles et polaires pour les tangentes.

Et d'abord il suffit d'étudier la correspondance (ω ; A, B, C), les propriétés des côtés QR, RP, PQ n'étant que les corrélatives des propriétés des points A, B, C.

Quelques résultats sont immédiats. Ce sont les seuls que nous donnerons.

23. Si ω décrit une normale ωP à la parabole (Π), B et C décrivent la tangente correspondante; de plus comme

$$AA' = -\frac{PP'}{2},$$

A décrit un diamètre de (Π).

24. *Si ω décrit une parallèle à l'axe*, H *est fixe*, A, B, C *décrivent donc l'hyperbole* (H) *qui passe par* H *et a l'axe et la tangente au sommet pour asymptotes.*

25. *Si ω décrit une perpendiculaire à l'axe*, G *est fixe*, A, B, C *décrivent donc une parabole* (Π') *homothétique de celle* (Π_2) *lieu de* I, *par rapport à* G, *le rapport d'homothétie étant* -2.

Toutes ces paraboles (Π') sont égales entre elles, si p est le paramètre de (Π), leur paramètre commun est $\frac{p}{4}$ et elles se déduisent l'une de l'autre par translation parallèle à l'axe.

26. A, B, C sont toujours sur deux faisceaux de coniques, les paraboles (Π') et les hyperboles équilatères (H).

Si ω décrit une droite Δ les coniques (H) et (Π') se correspondent homographiquement : En effet, étant donnée une hyperbole (H), le point H est bien déterminé et unique, il en est donc de même de ω, G et par suite de (Π'); étant donnée une parabole (Π'), G est bien déterminé, $H\omega = 3GF$ est connu, ω est donc bien déterminé et unique et par suite aussi l'hyperbole (H) correspondante.

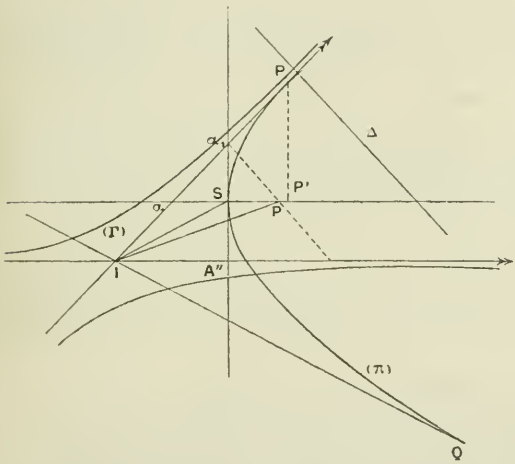
A, B, C décrivent donc une courbe du 4e degré.

Mais, si ω est le point à l'infini sur Δ, les coniques

(H) et (H′) dégénèrent en la droite de l'infini considérée comme droite double, cette droite double fait donc partie du lieu et le lieu véritable est une conique (Γ).

De plus si ω est le point à l'infini sur Δ, on voit immédiatement qu'une asymptote de (Γ) est la tangente à (H) perpendiculaire à Δ (*fig.* 7).

Fig. 7.



Si P est son point de contact, B et C sont sur cette droite; A est donc à l'infini sur le diamètre de (H) situé à une distance $-\frac{PP'}{2}$ de l'axe. C'est la deuxième asymptote de (Γ).

Soient I leur point de rencontre, centre de (Γ), IQ la deuxième tangente à (H) issue de I. On a

$$PP' + QQ' = 2H' = 2AA' = -PP',$$

donc

$$QQ' = 4H'.$$

I est le milieu du segment déterminé sur IQ par l'axe et la tangente au sommet de (H), il décrit quand Δ varie la parabole (H_2) (§ 5).

En résumé :

Si ω *décrit une droite* Δ, A, B, C *décrivent une conique* (Γ) *ayant pour asymptotes la tangente à* (Π), *perpendiculaire à* Δ *et une parallèle à l'axe.*

Le lieu des centres des coniques (Γ), *lorsque* Δ *varie, est la parabole* (Π_2).

27. S étant le milieu du segment $\alpha_1 A''$ déterminé sur la tangente au sommet par les deux asymptotes de (Γ) on voit que :

Dans toute conique (Γ), *le diamètre conjugué des cordes perpendiculaires à l'axe passe par le sommet* S *de* (Π).

De même :

Le diamètre conjugué des cordes parallèles à Δ *passe par le foyer* F *de* (Π).

Il en résulte en particulier que :

Étant donnée une hyperbole quelconque (Γ), *il y a une infinité de paraboles* (Π) *correspondantes et ces paraboles sont homothétiques entre elles par rapport au centre* I *de* (Γ).

Les propriétés qui suivent sont la conséquence immédiate de ce qui précède :

28. *Deux triangles* ABC *quelconques sont toujours inscrits dans une même conique* (Γ).

29. *Deux coniques* (Γ) *et* (Γ') *se coupent à distance finie en trois points qui sont les sommets du triangle* ABC *correspondant au point* ω *de rencontre des droites* Δ *et* Δ' *qui leur sont associées.*

Donc :

30. *Lorsque la droite* Δ *tourne autour d'un point* ω *les coniques* (Γ) *correspondantes font partie d'un faisceau ponctuel* (F) *ayant pour sommets le point à l'infini sur l'axe de* (H) *et les points* ABC *correspondant à* ω.

Lorsque ce point ω *décrit une droite* Δ *tous ces faisceaux ont en commun la conique* (Γ) *correspondant à* Δ.

Comme cas particulier on peut citer :

31. *Lorsque la droite* Δ *se déplace parallèlement à elle-même les coniques* (Γ) *forment un faisceau* (F) *d'hyperboles ayant mêmes asymptotes,* (Γ) *se réduisant à ses asymptotes lorsque* Δ *est normale à* (H). *Ces faisceaux ont en commun la droite de l'infini considérée comme droite double.*

32. Remarquons aussi que dans chacun des faisceaux (F) il y a une hyperbole (Γ_1) passant par le sommet S de (H). Elle correspond à la droite Δ qui passe par le centre de courbure δ de (H) au sommet. Lorsque Δ tourne autour de δ, on a :

Les hyperboles (Γ_1) *osculatrices à une parabole* (H) *à son sommet* S *et passant par le point à l'infini sur l'axe ont leur deuxième asymptote tangente à* (H). *Il y a une infinité de triangles inscrits dans* (Γ_1) *et circonscrits à* (H) *en* P, Q, R. *Les normales à* (H) *en* P, Q, R *concourent en un point* ω, *qui pour une même hyperbole* (Γ_1) *décrit une droite* Δ *passant par le centre de courbure* δ *de* (H) *au sommet.*

33. Toutes les coniques (Γ) peuvent être définies de la façon suivante :

On considère une conique particulière (Γ') et un faisceau (F') particulier ne contenant pas (Γ'), les coniques (Γ) font toutes partie des divers faisceaux déterminés par (Γ') et une conique quelconque de (F'). De plus toutes les coniques ainsi définies sont des coniques (Γ) donc :

Les coniques (Γ) *font toutes partie d'un réseau ponctuel ayant une droite double, la droite de l'infini.*

La jacobienne du réseau est donc formée de cette droite double et du lieu (Π_2) *des centres des coniques* (Γ).

Les résultats précédents peuvent servir à établir quelques autres propriétés.

34. *Si* A *décrit une droite* D (QR *passe par un point fixe* K), ω *décrit une parabole dont l'axe est perpendiculaire à* D.

En effet cherchons combien il y a de points ω sur une droite quelconque Δ : lorsque ω décrit Δ, A décrit une conique (Γ) qui coupe D en deux points. A un point A correspond un point ω et un seul, ω décrit donc une conique.

ω ne peut s'éloigner indéfiniment que si les normales en Q et R sont parallèles ou si l'une d'elles est rejetée à l'infini. Ces deux cas se produisent simultanément si QR est parallèle à l'axe. La direction asymptotique double est donc celle de la normale au pied sur (Π) du diamètre passant par K. Elle est bien perpendiculaire à D polaire de K.

La propriété énoncée au paragraphe 20 apparaît alors comme un simple cas particulier de la proposition précédente.

35. Plus généralement et par des considérations analogues on reconnaît que :

Si ω *décrit une courbe* (C) *de degré* n, A, B, C *décrivent une courbe* (C_1) *de degré* $2n$.

Si A *décrit une courbe de degré* n, ω *décrit une courbe de degré* $2n$ *et par suite* B *et* C *une courbe de degré* $3n$.

En particulier si A décrit une droite, B et C décrivent une cubique.

36. Si l'on sait construire la tangente T en un point ω de (C) et si l'on connaît les points A, B, C de (C_1) correspondants [et pour cela il suffit de connaître une normale à (Π) issue de ω], on saura construire les tangentes à (C_1) en A, B, C.

En effet, considérons une droite quelconque passant par ω. Soient ω un de ses points de rencontre avec (C), A_1, B_1, C_1 les points correspondants de (C_1). A, B, C, A_1, B_1, C_1 sont sur une même conique (Γ_1) dont nous connaissons les asymptotes. Lorsque Δ tend vers la tangente T à (C) en ω, A_1, B_1, C_1 tendent respectivement sur (C_1) vers A, B, C; donc :

La conique (Γ) *correspondant à la tangente* T *à* (C) *en un point* ω *est tritangente à* (C_1) *aux points* A, B, C *correspondant à* ω.

Tout revient donc à construire les tangentes en trois points donnés A, B, C d'une hyperbole dont on connaît les symptotes, problème très simple et bien connu.

[O¹7a]

DÉTERMINATION DES COMPLEXES DONT LES SURFACES RÉSOLVANTES SONT DE RÉVOLUTION ET COAXIALES;

PAR M. ÉMILE TURRIÈRE.

Dans mon article *Sur un complexe du quatrième ordre*, j'ai montré que les surfaces résolvantes du complexe des droites sur lesquelles deux plans rectangulaires Oxz et Oyz interceptent des segments de longueur constante, étaient, pour une certaine répartition des rayons de ce complexe, des surfaces de révolution autour de Oz. Je me propose de former l'équation dont dépendent tous les complexes jouissant de la même propriété : ce serait une erreur de croire qu'elle caractérise les complexes de révolution; le complexe cité n'est nullement de révolution et, pour un complexe de révolution donné, la nature des résolvantes de Transon reste subordonnée au choix des points de départ des rayons.

A chaque point $M(x, y, z)$ de l'espace, Transon associe une droite de cosinus directeurs X, Y, Z. Les surfaces résolvantes ne sont autres que les surfaces de tourbillon dans le champ de vecteurs (X, Y, Z), ainsi que cela résulte de l'équation même donnée par Transon. Le problème que je me propose d'étudier est donc le suivant : il s'agit de déterminer un champ de vecteurs de longueur égale à l'unité, tel que toutes les lignes de tourbillon soient des circonférences coaxiales

$$z = \text{const.}, \qquad x^2 + y^2 = \text{const.}$$

On aura donc des relations de la forme suivante

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = \lambda y,$$
$$\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = -\lambda x,$$
$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0;$$

λ est une fonction de (x, y, z). Il résulte de la troisième équation et des relations

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y} + \lambda y, \qquad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x} + \lambda x,$$

que λ n'est point quelconque et satisfait à la condition

$$y\frac{\partial \lambda}{\partial x} = x\frac{\partial \lambda}{\partial y}$$

qui exprime que λ est une fonction de z et de

$$r = \sqrt{x^2 + y^2};$$

il est donc possible de considérer λx et λy comme les dérivées partielles en x et en y d'une certaine fonction de z et de r.

On arrive ainsi à la conclusion suivante : *les composantes du vecteur cherché sont nécessairement de la forme*

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial V}{\partial z} + \zeta(z, r);$$

V est une fonction des trois variables x, y, z; ζ est une fonction de z et de r. Entre ces fonctions il n'existe qu'une seule relation exprimant que le vecteur est égal à un :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \zeta\right)^2 = 1.$$

La fonction V n'est donc pas quelconque : elle est intégrale d'une équation aux dérivées partielles du second ordre obtenue en écrivant que l'une des deux racines de l'équation du second degré en ζ,

$$\zeta^2 + 2\frac{\partial V}{\partial z}\zeta + \Delta_1 V - 1 = 0,$$

est de la forme spécifiée, c'est-à-dire satisfait à l'équation du premier ordre

$$y\frac{\partial \zeta}{\partial x} - x\frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0.$$

Les calculs sont d'ailleurs susceptibles d'une simplification, par suite de l'introduction de coordonnées cylindro-polaires : on écrit que l'une des racines de l'équation en ζ

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \zeta\right)^2 = 1$$

satisfait à la condition

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \theta} = 0;$$

l'équation du second ordre est alors immédiatement écrite. A toute intégrale de cette équation correspond une (ou deux, plus particulièrement) fonction ζ de z et de r; on détermine ainsi un des complexes cherchés.

Il est préférable de ne pas utiliser cette équation du second ordre et de se donner la fonction ζ de z et de r. Les fonctions V correspondantes dépendent alors d'une équation remarquable qui est de la forme de celles que l'on rencontre en Mécanique. On remarque d'ailleurs que la variable θ se sépare des deux autres variables, ce qui permet de simplifier la recherche d'une intégrale

complète; posons, en effet,

$$V = a\theta + W(z, r);$$

a désigne une constante arbitraire; quant à W, c'est la nouvelle fonction inconnue, qui ne contient que z et r; cette fonction W est définie par l'équation du premier ordre à deux variables seulement

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} + \zeta\right)^2 = 1 - \frac{a^2}{r^2}.$$

Si, en particulier, ζ se réduit à une fonction de z seulement, cette dernière équation est à variables séparées. Soit

$$\zeta = \frac{d\zeta_1}{dz};$$

on a alors une intégrale

$$W = \int \sqrt{1 - b^2 - \frac{a^2}{r^2}}\, dr + bz + \zeta_1 + c,$$

dont il est aisé d'obtenir une expression débarrassée de signe de quadrature; c, ζ_1 et ζ ne jouant finalement aucun rôle dans les équations du complexe, on peut les supposer identiquement nulles et poser

$$V = a\theta + bz + \int \sqrt{1 - b^2 - \frac{a^2}{r^2}}\, dr;$$

le complexe correspondant est constitué par les parallèles aux génératrices d'un certain cône de révolution autour de Oz, et la distribution des rayons de ce complexe est définie par les formules

$$X = -\frac{ay}{r^2} + \frac{x}{r}\sqrt{1 - b^2 - \frac{a^2}{r^2}},$$

$$Y = \frac{ax}{r^2} + \frac{y}{r}\sqrt{1 - b^2 - \frac{a^2}{r^2}},$$

$$Z = b.$$

La surface la plus générale dont les normales appartiennent au complexe précédent est une surface développable enveloppée par les plans perpendiculaires aux génératrices d'un cône de révolution autour de Oz, en des points d'une courbe quelconque tracée sur ce cône.

[A3g]

SUR L'ERREUR COMMISE DANS LE CALCUL APPROCHÉ D'UNE RACINE D'ÉQUATION PAR LA MÉTHODE DE NEWTON;

PAR M. ARNAUD DENJOY.

Soient $f(x) = 0$ une équation, a et b deux nombres dont on sait qu'il y a entre eux une racine et une seule de cette équation. On considère a comme une valeur approchée de cette racine ξ. La méthode de Newton pour le calcul de ξ consiste, à prendre pour nouvelle valeur plus approchée de ξ, le nombre

$$a - \frac{f(a)}{f'(a)} = a_1.$$

L'erreur que l'on commet en choisissant pour ξ cette valeur a_1, est évaluée par une formule qui se trouve dans tous les Ouvrages d'enseignement et que nous rappelons ci-dessous. Cette formule me paraît défectueuse de deux points de vue :

1° Elle ne tient compte que de l'étendue de l'intervalle où est enfermée la racine ξ, et nullement de la petitesse du résultat de substitution $f(a)$, petitesse qui manifestement doit donner une indication sur la proximité où a se trouve de ξ.

2° Elle ne nous donne pas une limite inférieure non nulle de la valeur absolue de l'erreur commise, dans le cas où nous connaissons le sens de cette erreur, c'est-à-dire le signe de f''.

Nous allons donner à l'erreur une nouvelle forme ne prêtant à aucune de ces deux critiques.

Posons, selon l'usage,

$$\xi = a + h.$$

On a, f'' étant supposée continue entre a et ξ,

$$(1) \quad f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a + \theta h) = 0 \qquad 0 < \theta < 1.$$

Comme

$$\xi - a_1 = \xi - a + \frac{f(a)}{f'(a)} = h + \frac{f(a)}{f'(a)}$$

l'erreur E commise sur ξ en choisissant a_1 est

$$h + \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Cette erreur est égale à $-\frac{h^2}{2} \frac{f''(a + \theta h)}{f'(a)}$. M étant le maximum de $|f''(x)|$ dans l'intervalle de a à b, on a

$$(2) \qquad E = \delta \frac{|b - a|^2}{2} \frac{M}{f'(a)}$$

avec $\delta^2 < 1$, le signe de δ étant connu, si celui de f'' l'est. Telle est la formule habituelle que nous voulons modifier.

Ecrivons l'équation (1) sous la forme plus maniable :

$$(3) \qquad A + Bh + Ch^2 = 0.$$

L'idée qui nous guidera est la suivante : Si A est suffisamment petit, h peut être développé suivant les

puissances de A, le premier terme est $-\frac{A}{B}$, et le second nous donnera l'ordre de l'erreur commise en bornant h à son premier terme.

Résolvons l'équation (3). On a :

$$h = -\frac{B}{2C} \pm \frac{B}{2C}\sqrt{1 - \frac{4AC}{B^2}}.$$

La racine h, très petite en même temps que A, correspond au signe $+$ devant le radical. Donc, le radical ayant un sens arithmétique, nous écrirons

$$h = -\frac{B}{2C} + \frac{B}{2C}\sqrt{1 - \frac{4AC}{B^2}}.$$

Or, d'après

$$f(1+u) = f(1) + uf'(1) + \frac{u^2}{2}f''(1+\theta u) \qquad (0 < \theta < 1),$$

formule valable si $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ sont continues quand x varie de 1 à $1+u$, on a, si $u > -1$,

$$(1+u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{2(1+\theta u)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si donc

$$\frac{4AC}{B^2} < 1,$$

on a, en posant

$$u = -\frac{4AC}{B^2},$$

$$h = -\frac{B}{2C} + \frac{B}{2C}\left[1 - \frac{2AC}{B^2} - \frac{2A^2C^2}{B^4}\frac{1}{\left(1 - \frac{4\theta AC}{B^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

ou, si

$$s = \frac{1}{\left(1 - \frac{4\theta AC}{B^2}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$(4) \qquad h = -\frac{A}{B} - s\frac{A^2C}{B^3}.$$

Supposons a assez voisin de ξ et par suite $f(a) = \Lambda$ assez petit pour nous donner

$$-1 < \frac{4\,AC}{B^2} < \frac{1}{2}.$$

Alors, si $AC > 0$, on a

$$1 < s < \sqrt{8} < 3;$$

si $AC < 0$, on a

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{8}} < s < 1.$$

Rétablissons les notations primitives. On a

$$(5) \qquad h = -\frac{f(a)}{f'(a)} - s\,\frac{f^2(a)\,f''(a+\theta h)}{f'^3(a)}.$$

Lorsque $f(a)$ est très petit, s est très voisin de 1. Dans tous les cas, même si l'on ignore le signe de $f''(a+\theta h)$, dès que la condition

$$(6) \qquad -1 < 2\,\frac{f(a)\,f''(a+\theta h)}{f'^2(a)} < \frac{1}{2}$$

est vérifiée, on sait que

$$\frac{1}{3} < s < 3$$

et l'on connaît la position de s relativement à 1 dès que l'on sait le signe de $f(a)\,f''(a+\theta h)$.

L'expression

$$(7) \qquad E = -s\,\frac{f^2(a)\,f''(a+\theta h)}{f'^3(a)}$$

échappe aux deux critiques que nous avions faites à la formule habituelle.

En effet, d'abord elle fait jouer un rôle à la valeur de $f(a)$ dans la détermination de l'erreur commise en choisissant a comme valeur approchée de ξ. En second

lieu, si nous connaissons le signe de f'', c'est-à-dire le sens de l'erreur commise, nous avons une limite inférieure non nulle de la valeur absolue de l'erreur.

Il est à remarquer que notre formule ne nécessite pas, comme la formule (2), l'obligation d'enfermer ξ entre deux limites rapprochées. Elle montre que la méthode de Newton donne d'aussi bons résultats quand $f(a)$ est du signe opposé à $f''(x)$ (dans le domaine séparant la racine) que dans l'hypothèse adverse. (Même les résultats sont meilleurs dans le premier cas, contrairement à l'opinion courante, en ce sens que, à valeurs absolues égales de $\frac{AC}{B^2}$, le nombre a_1 est plus approché de ξ si AC est négatif que si AC est positif. La représentation géométrique donnerait de ce fait une explication intuitive.)

La formule (7) conduit donc à appliquer la méthode de Newton, dès que, par excès ou par défaut, on a de la racine une valeur approchée donnant un résultat de substitution suffisamment petit, sans *avoir à s'inquiéter du signe de* f'', à la condition de connaître seulement une limite supérieure de son module.

Soient M le maximum de $|f''(x)|$, N le minimum de $|f'(x)|$ dans une région où est comprise la racine ξ. Pour avoir ξ à $\frac{1}{n}$ près, par une seule application de la méthode de Newton, il suffira de trouver dans la région considérée un nombre a donnant dans $f(x)$ un résultat de substitution inférieur en valeur absolue à

$$\sqrt{\frac{2N^3}{3M}}\,\frac{1}{\sqrt{n}}$$

[et satisfaisant aussi à la condition (6) indépendante de n]. Si l'on connaît le signe de $f''(x)$ dans la région

et si $f(a)f''(x)$ est négatif, la limite fournie par cette formule peut être multipliée par $\sqrt{3}$.

Donnons une application numérique de la formule (7).

Soit à résoudre l'équation

$$f(x) \equiv x^3 - 9x + 1 = 0.$$

Elle possède deux racines positives. Nous allons, pour la plus grande, déterminer sa valeur approchée à une unité près. A cette valeur, nous appliquerons la méthode de Newton et nous calculerons successivement par la formule habituelle (2) et par notre formule (7) l'erreur commise.

La plus grande racine ξ est comprise entre 2 et 3; on a

$$f(2) = -9, \qquad f(3) = 1.$$

Appliquons la méthode à la valeur à une unité près par excès, soit 3; a sera donc égal à 3. On a

$$a_1 = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 3 - \frac{1}{18}.$$

La formule (2), où nous faisons $b = 2$, $a = 3$, $M = 18$, nous enseigne simplement que l'erreur sera inférieure à $\frac{1}{2}$.

La formule (7) nous donnera deux limites comprenant l'erreur. On a :

$$E = -s\frac{f^2(3)f''(3-\theta)}{2f'^3(3)}.$$

Évaluons

$$\frac{4AC}{B^2} = 4\frac{f(3)f''(3-\theta)}{f'^2(3)}.$$

Ce nombre est égal à

$$\frac{4 \times 6 \times (3-\theta)}{18^2} = \frac{2}{9}\left(1 - \frac{\theta}{3}\right).$$

Il est donc positif et inférieur à $\frac{2}{9} < \frac{1}{2}$. On a donc $1 < s < \sqrt{8}$. A la rigueur, $\sqrt{8}$ pourrait être remplacé par $\left(1 - \frac{2}{9}\right)^{-\frac{3}{2}} < \frac{3}{2}$.

L'erreur commise est négative et sa valeur absolue est d'une part inférieure à

$$\frac{3}{2}\,\frac{f^2(3)f''(3)}{2f'^3(3)} = \frac{1}{432},$$

et d'autre part supérieure à

$$\frac{f^2(3)f''(2)}{2f'^3(3)} = \frac{1}{972}.$$

Le rapport des deux limites est $\frac{9}{4}$.

La formule habituelle, qui nous donne seulement une limite supérieure de l'erreur, nous la donne encore 200 fois trop forte.

[D2aα]

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME SUR LES SÉRIES A TERMES POSITIFS;

PAR M. ARNAUD DENJOY.

On sait que, dans une série convergente u_n à termes positifs et JAMAIS CROISSANTS avec n, le produit $n\,u_n$ tend vers zéro, quand n croît indéfiniment.

Voici une démonstration qui me paraît fondée sur la vraie raison de ce fait :

ε étant un nombre arbitrairement donné à l'avance, la convergence de la série équivaut à l'existence d'un

nombre p tel que

$$u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_n < \frac{\varepsilon}{2},$$

quel que soit n supérieur à p. D'après l'hypothèse de la non-croissance des termes de la série, on a

$$u_{p+1} \geqq u_{p+2} \geqq \ldots \geqq u_n.$$

Donc

$$(n-p)u_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si donc

$$n > 2p,$$

on a

$$n u_n < \varepsilon$$

d'après

$$n - p > \frac{n}{2}.$$

Donc, $n u_n$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. C. Q. F. D.

On sait que la condition de la non-croissance de u_n est essentielle. Si elle n'est pas exigée, u_n n'est assujetti qu'à tendre vers zéro. (*Voir* Borel, *Leçons sur les séries à termes positifs*.) Par exemple, on aura

$$n u_n = \sqrt{n},$$

pour une infinité de valeurs de n, si, dans une série convergente à termes positifs, on remplace le terme dont le rang est p^3 par $\frac{1}{p^{\frac{3}{2}}}$. Les termes substitués formant une série convergente, la série modifiée est encore convergente, sans que $n u_n$ tende vers zéro.

[B1c]

DÉMONSTRATION D'UN THEORÈME DE KUMMER SUR UN TYPE DE DETERMINANTS;

PAR M. TH. GOT,
Ancien Ingénieur de la Marine,
Professeur au Lycée d'Agen.

Dans le Tome 135 (1909) du *Journal de Crelle*, M. Saalschütz donne une série de formules relatives à certains déterminants qu'il appelle *Zirkulante* et qu'on pourrait appeler, je crois, *circulaires*. La dernière formule qu'il indique se trouve déjà dans Kummer (au signe près, qu'il ne précise pas); c'est pour l'expression du nombre des classes d'idéaux, que ce dernier l'emploie, dans son Mémoire du *Journal de Liouville*, t. XVI (1851).

Comme M. Saalschütz ne donne pas la démonstration de la formule, et que la démonstration de Kummer est incomplète, je crois utile d'en donner une nouvelle, d'autant plus que cette formule paraît susceptible d'autres applications.

Soit D le déterminant circulaire d'ordre $n-1$:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_3 & a_4 & \dots & a_n & a_1 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \dots & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ a_{n-1} & a_n & \dots & a_{n-4} & a_{n-3} \end{vmatrix}.$$

La formule à démontrer est la suivante :

Si l'on a

$$(1) \qquad a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0,$$

on a

$$(2) \qquad D = (-1)^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}} \frac{u(\omega_1)\,u(\omega_3)\ldots u(\omega_{n-1})}{n},$$

formule où $u(\omega)$ désigne le polynome :

$$u(\omega) = a_1 + a_2\omega + a_3\omega^2 + \ldots + a_n\omega^{n-1},$$

et où $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$ sont les racines de l'équation :

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 = 0.$$

Soit en effet ω une racine quelconque de cette équation; on a, comme ω^n est égal à 1,

$$\begin{aligned}
u(\omega) &= a_1 + a_2 + a_3\omega^2 + \ldots + a_n\omega^{n-1},\\
\omega\, u(\omega) &= a_1\omega + a_2\omega^2 + a_3\omega^3 + \ldots + a_n,\\
\omega^2 u(\omega) &= a_1\omega^2 + a_2\omega^3 + a_3\omega^4 + \ldots + a_n\omega,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\omega^{n-1} u(\omega) &= a_1\omega^{n-1} + a_2 + a_3\omega + \ldots + a_n\omega^{n-2}.
\end{aligned}$$

En considérant $u(\omega)$ comme donnée, on a ainsi, entre $\omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$, n relations linéaires, dont par suite le déterminant est nul :

$$(3) \qquad \begin{vmatrix}
a_1 - u & a_2 & a_3 & \ldots & a_n\\
a_n & a_1 - u & a_2 & \ldots & a_{n-1}\\
a_{n-1} & a_n & a_1 - u & \ldots & a_{n-2}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_1 - u
\end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation du $n^{\text{ième}}$ degré en u admet pour ses n racines

$$u(\omega_1), \quad u(\omega_2), \quad \ldots, \quad u(\omega_{n-1}), \quad u(1);$$

cette racine $u(1)$ est nulle à cause de la relation (1).

Le terme tout connu est donc nul et le coefficient du terme en u du déterminant développé est égal à $-u(\omega_1)\,u(\omega_2)\,u(\omega_{n-1})$.

Ce coefficient est la somme changée de signe des

mineurs relatifs aux éléments de la diagonale principale, du déterminant (3), dans lequel on a fait $u = 0$. Soient $M_1, M_2, \ldots, M_n$ ces mineurs.

Tous ces mineurs sont égaux; en effet, le déterminant ne change pas de valeur si l'on recule les p premières colonnes de $n-1-p$ rangs, puis les p premières lignes de $n-1-p$ rangs, ce qui entraîne un nombre *pair* de permutations de lignes ou de colonnes; le $(p+1)^{\text{ième}}$ terme de la diagonale principale devient alors le premier et l'on constate que le nouveau déterminant est identique au premier. Tout revient donc à démontrer que l'un de ces mineurs, M_1 par exemple, est égal à $(-1)^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}} D$:

$$M_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \\ a_n & a_1 & \ldots & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_n & \ldots & a_{n-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_3 & a_4 & \ldots & a_1 \end{vmatrix}.$$

En ajoutant toutes les lignes à la seconde et tenant compte de (1) on remplace les éléments de cette ligne par $-a_2, -a_3, \ldots, -a_n$ et l'on voit alors que $-M_1$ est formé des mêmes lignes que D, à leur ordre près.

Pour ramener à leur place les $n-2$ dernières lignes de M_1, il faut effectuer $n-4+n-5+\ldots+1$ permutations de lignes, c'est-à-dire $\frac{(n+4)(n-3)}{2}$.

On a donc

$$-M_1 = (-1)^{\frac{(n-4)(n-3)}{2}} D.$$

D'ailleurs $\frac{(n-4)(n-3)}{2}+1$ et $\frac{(n+2)(n-1)}{2}$ sont de même parité; on a donc bien

$$u(\omega_1)\,u(\omega_2)\ldots u(\omega_{n-1}) = n\,M_1 = (-1)^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}} n\,D.$$

C. Q. F. D.

Remarque. — Cette formule donne la norme du nombre $u(\omega)$ dans le corps circulaire $c\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)$, sous une forme commode.

D'ailleurs, tout entier de ce corps peut se mettre aisément sous la forme $u(\omega)$ dans laquelle la somme des coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est nulle; ils ne sont alors pas entiers, mais cette transformation peut cependant être avantageuse.

[L' 6a]

SUR LE CENTRE DE COURBURE EN UN POINT D'UNE CONIQUE;

PAR M. G. VALIRON.

Voici une méthode simple et nouvelle, je crois, pour obtenir la construction du centre de courbure en un point d'une conique.

On sait que les pieds des normales passant par un point se trouvent sur une certaine hyperbole passant par ce point, l'hyperbole d'Apollonius. Inversement toute hyperbole, dont les directions asymptotiques sont les directions principales de la conique, et qui passe par le centre, est l'hyperbole d'Apollonius d'un certain point. Ces propriétés se démontrent géométriquement.

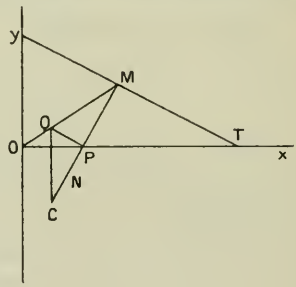
Ceci rappelé : soient M un point d'une conique, M′ un point voisin, les normales en ces deux points se coupent en un point I, qui se trouve sur l'hyperbole d'Apollonius H′ passant par M et M′. Faisons tendre M′ vers M ; le point I a pour position limite le centre de courbure C en M, l'hyperbole H′ devient l'hyper-

bole d'Apollonius H tangente à la conique en M. On obtient ainsi le résultat suivant :

Le centre de courbure C *en un point* M *d'une conique est le point d'intersection de la normale en* M *avec l'hyperbole d'Apollonius* H, *tangente en* M *à la conique.*

Pour construire le point C, il suffit, comme je l'ai fait ailleurs ([1]), d'appliquer le théorème de Pascal.

La figure donne l'une des constructions qu'on peut ainsi obtenir dans le cas d'une conique à centre ; Ox, Oy sont les axes, MT la tangente, MN la normale, PQ est parallèle à la droite MT, QC à Oy.



Cette construction n'exige le tracé d'aucune perpendiculaire, la tangente et la normale étant connues ; elle est donc graphiquement plus simple que celle donnée en général dans les cours de spéciales ([2]).

([1]) *Sur la courbure des courbes triangulaires* (*J. Math. sp.*, février 1911).

([2]) *Voir* par exemple Niewenglowski, *Cours de Géométrie, analytique*, t. II, p. 249, ou Picard, *Traité d'Analyse*, t. I, p. 358.

BIBLIOGRAPHIE.

Introduction a la Théorie des Nombres algébriques; par *J. Sommer*, professeur à la *Technische Hochschule* de Dantzig. — Édition française revue et augmentée. Traduit de l'allemand par *A. Lévy*, professeur au lycée Saint-Louis, avec Préface de *J. Hadamard*. — Grand in-8° de 376 pages, chez A. Hermann. — Prix : 15 francs.

Il convient de féliciter le traducteur, M. Lévy, et l'éditeur, M. Hermann, de l'heureuse idée qu'ils ont eue de nous présenter une édition française de cet Ouvrage. Il serait superflu de faire à nouveau l'éloge du livre du professeur de Dantzig, après l'analyse détaillée que le regretté J. Tannery en a donnée dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* de 1907. Répétons seulement qu'il atteint complètement le but de son auteur : fournir au lecteur, par une etude claire et détaillée des corps quadratiques et cubiques, le moyen d'aborder ensuite, sans difficulté, les théories générales dans les Ouvrages fondamentaux de Dedekind, de Kronecker et d'Hilbert.

L'auteur suppose seulement connu du lecteur le programme d'Algèbre de nos classes de Mathématiques spéciales. Toutes les propositions élémentaires de la Théorie des Nombres, qui ne sont pas partout classiques et qui sont employées dans l'Ouvrage, sont démontrées dans un premier Chapitre.

Le second développe la théorie des corps quadratiques. Un grand nombre de notions essentielles de la théorie générale sont introduites de la façon la plus naturelle et la plus suggestive dans ce cas particulier; citons celles d'idéal, de classes d'idéaux, d'unités. La théorie est poussée jusqu'à l'étude des genres, faite d'après les méthodes de Hilbert.

Le troisième Chapitre contient des applications intéressantes au dernier théorème de Fermat, aux formes quadratiques

et aux interprétations géométriques de Klein et de Minkowski.

Le quatrième Chapitre traite des corps cubiques et le dernier des corps relativement quadratiques par rapport à un corps quadratique.

Lorsque nous aurons ajouté que de nombreuses applications numériques accompagnent les démonstrations, nous aurons fait comprendre tout le profit que les lecteurs français ont à tirer de cet Ouvrage, dans la traduction très claire que nous en donne M. Lévy. TH. GOT.

CORRESPONDANCE.

M. **E.-N. Barisien.** — *Résolution d'équations au moyen d'identités.* — On peut appeler les équations de ce genre *équations-énigmes*, car elles seraient presque impossibles à résoudre sans la connaissance d'identités appropriées. En voici deux exemples intéressants :

I. *Résoudre l'équation du huitième degré*

$$(2x^2+a^2)^4+(2x^2-a^2)^4+(4ax)^4 \\ -(4x^4+12a^2x^2+a^4)^2=b^8.$$

On a l'identité

$$(2x^2+a^2)^4+(2x^2-a^2)^4+(4ax)^4 \\ =(4x^4+12a^2x^2+a^4)^2+(4x^4-12a^2x^2+a^4)^2,$$

de sorte que l'équation devient

$$(4x^4-12a^2x^2+a^4)^2=b^8$$

et se décompose en deux équations bicarrées

$$(4x^4-12a^2x^2+a^4-b^4)(4x^4-12a^2x^2+a^4+b^4)=0.$$

Et les huit racines sont

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{\frac{3a^2 \pm \sqrt{8a^4 + b^4}}{2}},$$

$$\left.\begin{matrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{\frac{3a^2 \pm \sqrt{8a^4 - b^4}}{2}}.$$

II. *Résoudre l'équation du huitième degré*

$$2(3x^2 + a^2)^4 - (3x^2 + 2ax - a^2)^4 - (4ax)^4 = b^8.$$

Or on a l'identité

$$\begin{aligned} &2(3x^2 + a^2)^4 \\ &\quad = (3x^2 + 2ax - a^2)^4 + (3x^2 - 2ax - a^2)^4 + (4ax)^4. \end{aligned}$$

L'équation devient donc

$$(3x^2 - 2ax - a^2)^4 = b^8.$$

Elle se décompose ainsi

$$\begin{aligned} &(3x^2 - 2ax - a^2 - b^2)(3x^2 - 2ax - a^2 + b^2) \\ &\qquad [(3x^2 - 2ax - a^2)^2 + b^4] = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(3x^2 - 2ax - a^2 - b^2)(3x^2 - 2ax - a^2 + b^2) \\ &\quad (3x^2 - 2ax - a^2 - b^2\sqrt{-1})(3x^2 - 2ax - a^2 + b^2\sqrt{-1}) = 0. \end{aligned}$$

On est donc ramené à résoudre quatre équations du second degré, ce qui donne les huit racines

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{a \pm \sqrt{4a^2 + 3b^2}}{3},$$

$$\left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\} = \frac{a \pm \sqrt{4a^2 - 3b^2}}{3},$$

$$\left.\begin{matrix} x_5 \\ x_6 \end{matrix}\right\} = \frac{a \pm \sqrt{4a^2 + 3b^2\sqrt{-1}}}{3},$$

$$\left.\begin{matrix} x_7 \\ x_8 \end{matrix}\right\} = \frac{a \pm \sqrt{4a^2 - 3b^2\sqrt{-1}}}{3}.$$

Si $b = 0$, ces racines deviennent les deux racines quadruples $x = a$ et $x = -\frac{a}{3}$.

M. **Joseph Joffrey**. — *Fermat* a trouvé une propriété arithmétique qui est traduite par l'égalité

$$a^p = mp + a.$$

Généralisée elle devient

$$(1) \qquad a^{p+k(p-1)} = mp + a,$$

p étant premier et les autres nombres entiers quelconques.

Application de la formule (1). — Soit

$$(2) \qquad x^{37} + y^{37} = z^{37};$$

(1) fournit aisément

$$x^{37} = \begin{cases} 2m + x, \\ 3m + x, \\ 5m + x, \\ 7m + x, \\ 13m + x, \\ 19m + x, \\ 36m + x. \end{cases}$$

Donc $x^{37} - x$ qui est multiple de 2, 3, 5, 7, 13, 19, 37 est multiple de leur produit et je puis écrire

$$x^{37} - x = 2.3.5.7.13.19.37m = \mathrm{P}m,$$
$$y^{37} - y = \mathrm{P}m',$$
$$z^{37} - z = \mathrm{P}m'',$$
$$x^{37} + y^{37} - z^{37} + \mathrm{P}m_1 = x + y - z,$$

ou, en vertu de (2),

$$(3) \qquad x + y - z = \mathrm{P}m_1,$$

il est aisé de prouver que $\mathrm{P}m_1$ est positif; (3) donne

$$x = \mathrm{P}m_1 + (z - y)$$

et, si j'ai $x < y < z$, donne

$$x > \mathrm{P} + 1 \qquad \text{ou} \qquad x > 1919191.$$

Conclusion. — Si l'équation (2) admet des solutions entières,

elles sont supérieures à ce nombre, ce qui n'invite pas à penser que cette équation en admet.

Remarque. — De la formule

$$a^{p+k(p-1)} = mp + a$$

je tire aussi aisément

$$a^{85} = 2.3.5.7.13.29.85 = 6729450\,m + a,$$
$$a^{49} = 2.3.5.7.13.17.49 = 2274090\,m + a,$$

et j'en conclus comme ci-dessus pour les solutions entières de

$$x^{85} + y^{85} = z^{85},$$
$$y^{49} + y^{49} = z^{49},$$

supposées possibles, des nombres considérables.

La même remarque est applicable à autant d'équations de *Fermat* que l'on veut considérer.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1945.

(1902, p. 575.)

Déterminer les complexes tels que le couple [M, P], *formé sur chaque droite par le point central* M *de la corrélation normale et par le plan* P *passant par cette droite et normal au plan central de cette corrélation, forme un groupe de contact.*

On entend par là que les points M *peuvent être distribués sur une famille de surfaces telles que le plan tangent, en chaque point* M *à la surface qui y passe, soit précisément le plan* P. A. Petot.

SOLUTION,

Par M. A. B.

Rappelons quelques notions relatives aux complexes linéaires et congruences de droites, qui sont bien connues et qui rendront la solution immédiate.

1° Étant donnée une droite D d'un complexe, il existe une seule droite D′ du complexe, rencontrant D *en un point* M. Soit P le plan limite formé par D′ et D.

Sur la droite D, les couples [M, P] forment une corrélation anharmonique, dite *corrélation normale* du complexe.

2° Quand une congruence est formée de droites d'un complexe, si, pour une droite D de la congruence, on détermine les foyers F et F_1 et les plans focaux correspondants P et P_1, les deux couples [F, P_1] et [F_1, P] sont deux couples de la corrélation normale du complexe.

Pour les surfaces focales de la congruence, le plan tangent en F est P_1 et le plan tangent en F_1 est P.

3° Considérons une droite D d'un complexe, un point M de D et le plan P_1 relatif à un autre point M_1 de cette droite D.

Si les points tels que M peuvent être distribués en une famille de surfaces S, de façon que la surface S qui passe en M y admette le plan P_1 comme plan tangent, condition d'Euler, les plans M_1 relatifs aux plans tels que P_1 pourront à leur tour être distribués en une famille de surfaces S_1, de manière que la surface S_1 qui passe par M_1 y admette pour plan tangent le plan P relatif à M.

En effet, les droites du complexe peuvent par hypothèse (à cause du problème de Transon) être distribuées en une famille de congruences, dont les surfaces S sont les surfaces focales d'une série; les surfaces S_1 seront les surfaces focales de l'autre série, et, eu égard à l'alternance des plans focaux et des foyers, la proposition se trouve établie.

Appliquons ce résultat au complexe de l'énoncé. Pour lui, les points M et M_1 sont le point central C et le point à l'infini sur D; les plans P et P_1 correspondants sont rectangulaires.

Le complexe est formé par une famille de congruences de normales, puisque les plans focaux de ces congruences sont rectangulaires.

Comme un foyer est à l'infini et que les deux foyers sont les centres de courbure de la surface à laquelle D est normale, la surface lieu de C est développable.

Conclusion. — Le complexe est formé par les normales à une famille de surfaces développables dépendant d'un paramètre.

La réciproque est facile à démontrer.

2157.

(1910, p. 335.)

Démontrer, en partant de l'équation générale d'une quadrique en coordonnées tétraédriques, que le rapport des distances d'un point courant M *aux plans tangents en deux points fixes* M_1 *et* M_2 *est proportionnel au rapport des distances du plan tangent en* M *aux deux points fixes* M_1 *et* M_2. G. F.

SOLUTION,

Par M. Thié.

Soient

$$f(X, Y, Z, T) = 0$$

l'équation de la quadrique, $(x_1, y_1, \ldots)$, $(x_2, y_2, \ldots)$, $(x, y, \ldots)$ les coordonnées respectives des points M_1, M_2 et M. L'équation du plan tangent en M_1 est

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} X + \frac{\partial f}{\partial y_1} Y + \ldots = 0,$$

en posant comme d'habitude

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f(X, Y, Z, T)}{\partial X} \qquad (X = x_1,\ Y = y_1, \ldots).$$

Si D_1 est la distance du point M à ce plan tangent, on a, k_1 ne dépendant que du point M_1,

$$D_1 = k_1\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} x + \frac{\partial f}{\partial y_1} y + \ldots\right);$$

on a aussi, avec une notation analogue

$$D_2 = k_2\left(\frac{\partial f}{\partial x_2} x + \frac{\partial f}{\partial y_2} y + \ldots\right),$$

d'où

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{k_1}{k_2}\,\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1} x + \ldots}{\dfrac{\partial f}{\partial x_2} x + \ldots},$$

ou encore, en vertu d'une identité connue,

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{k_1}{k_2} \frac{\frac{\partial f}{\partial x} x_1 + \ldots}{\frac{\partial f}{\partial x} x_2 + \ldots}.$$

La fraction qui multiplie dans le second membre $\frac{k_1}{k_2}$ est égale au rapport des distances des points M_1 et M_2 au plan tangent en M, ce qui prouve la proposition énoncée.

Autre solution par M. Bouvaist.

2158.

(1910, p. 335.)

Soient AB *une corde d'une hyperbole équilatère de centre* O *et* C *le milieu de cette corde:* M *étant un point de la courbe et* P *étant la projection de ce point sur la corde* AB, *on a*

$$\widehat{AB, AM} + \widehat{BA, BM} = -\widehat{OC, OP}.$$

Cas où AB *est un diamètre.* G. F.

SOLUTION,

Par M. Thié.

Employons le signe de la congruence $\equiv$ pour indiquer que deux angles sont égaux à un multiple près de π. Si D est le milieu de MB, les quatre points O, D, C, P sont, comme on sait, sur un cercle, et l'on a

$$\widehat{OC, OP} \equiv \widehat{DC, DP}.$$

Soit M′ le symétrique du point M par rapport à AB. DC est parallèle à MA et DP est parallèle à MB′. On a donc

$$\widehat{DC, DP} = \widehat{MA, BM'} = \widehat{MA, AB} + \widehat{AB, BM'}$$
$$= -\widehat{AB, MA} - \widehat{AB, BM} \equiv -\widehat{AB, MA} - \widehat{BA, BM},$$

d'où finalement

$$\widehat{OC, OP} \equiv -\widehat{AB, MA} - \widehat{BA, BM},$$

ce qui est l'égalité à démontrer (en remplaçant, pour plus de généralité, le signe = par le signe ≡).

Si AB tend vers un diamètre, le point C tend vers le point O, et OC tend vers le diamètre conjugué de AB. Quand le point M varie sur l'hyperbole, le point P décrit AB, et le second membre de l'égalité a une valeur constante. On a donc dans ce cas

$$\widehat{AB, AM} + \widehat{BA, BM} = \text{const.}$$

Cela veut dire que AM et BM font avec AB des angles dont la somme est constante, et l'on en conclut immédiatement que ces droites engendrent des faisceaux *inversement* égaux. C'est un résultat bien connu.

Autres solutions par MM. Parrod et Bouvaist.

2159.

(1910, p. 326.)

Démontrer que les foyers de toutes les hyperboles équilatères d'un plan ayant un diamètre commun sont sur une lemniscate. L. Klug.

Solution,

Par M. Parrod.

Soient O le centre, A une extrémité du diamètre commun et F un foyer. Dans le triangle OAF, menons la hauteur AH et désignons par ρ le côté OF et par ω l'angle AOF; on a

$$OH^2 - AH^2 = \frac{\rho^2}{2},$$

donc

$$\rho^2 = 2a^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi),$$
$$\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi.$$

Autres solutions par MM. Abramescu, Barisien, Bouvaist et Klug.

2161.

(1910, p. 336.)

Une pyramide régulière, de sommet S, *a pour base un rectangle* ABCD. *On considère le paraboloïde de révolution de sommet* S *qui passe par le cercle circonscrit au rectangle* ABCD *et le parallélépipède indéfini dont ce rectangle est la section droite.*

Démontrer que le solide commun à ces deux corps, limité au plan de base de la pyramide, a un volume double de celle-ci. M. D'OCAGNE.

SOLUTION,

Par M. PARROD.

Désignons par $2a$, $2b$ et h les dimensions du rectangle et la hauteur de la pyramide.

L'équation du paraboloïde étant

$$y^2 + z^2 = 2px,$$

on a

$$a^2 + b^2 = 2ph.$$

L'expression du volume commun est

$$V = \int_{-a}^{+a} dy \int_{-b}^{+b} \left(h - \frac{y^2 + z^2}{2p}\right) dz = 4hab - \frac{4ab(a^2 + b^2)}{6p}.$$

Simplifions, il vient

$$V = \frac{2}{3} \cdot 2a.2b.h.$$

C. Q. F. D.

[M³6b]

SUR LA COURBURE DES BIQUADRATIQUES GAUCHES DE PREMIÈRE ESPÈCE;

PAR M. C. SERVAIS,
Professeur à l'Université de Gand.

1. Soient MNPQ un quadrangle inscrit dans une conique Σ, ABC le triangle diagonal, $A \equiv (MN, PQ)$, $B \equiv (MP, NQ)$, $C \equiv (MQ, NP)$; m la tangente au point M; $P_1 \equiv (m, QP)$, $N_1 \equiv (m, QN)$, $A_1 \equiv (m, CB)$, $B_1 \equiv (m, CA)$; a et b les droites AMN, BMP. Le rayon de courbure ρ de la conique Σ au point M est donné par la formule [1]

$$\rho = \frac{1}{2}\,\frac{MN_1\,MP_1}{N_1P_1}\,\frac{\sin(ab)}{\sin(ma)\sin(mb)}.$$

Si l'on désigne par C_1 le point (m, AB) on a

$$(MN_1A_1C_1) = -1, \qquad (MP_1B_1C_1) = -1$$

ou

$$\frac{2}{MN_1} = \frac{1}{MA_1} + \frac{1}{MC_1}, \qquad \frac{2}{MP_1} = \frac{1}{MB_1} + \frac{1}{MC_1}.$$

De ces égalités on déduit

$$\frac{2\,N_1P_1}{MN_1.MP_1} = \frac{A_1B_1}{MA_1.MB_1};$$

par suite

$$\rho = \frac{MA_1.MB_1}{A_1B_1}\,\frac{\sin(ab)}{\sin(ma)\sin(mb)}.$$

[1] SERVAIS, *Sur la courbure des coniques et des cubiques gauches* (*Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, t. I, 1906).

Une conique étant déterminée par un triangle conjugué ABC, *un point* M *et la tangente* m, *le rayon de courbure en ce point est donné par la formule*

$$\rho = \frac{MA_1 . MB_1}{A_1 B_1} \frac{\sin(ab)}{\sin(ma)\sin(mb)}.$$

A_1, B_1 *désignent les points* (m, CB), (m, CA); a, b *les droites* MA, MB.

2. Une biquadratique gauche de première espèce est déterminée par le tétraèdre ABCD conjugué aux quadriques dont elle est l'intersection, un de ses points M_1 et la tangente m_1 en ce point. Le plan osculateur μ_1 au point M_1 de la courbe est le plan tangent en M_1 à l'hyperboloïde (H) conjugué au tétraèdre ABCD et ayant pour génératrice m_1. Les arêtes opposées AB et CD, AC et BD, AD et BC déterminent dans le plan μ_1 les sommets opposés P et P_1, Q et Q_1, R et R_1 d'un quadrilatère complet et les droites p et p_1, q et q_1, r et r_1 projetant de M_1 les sommets P et P_1, Q et Q_1, R et R_1 sont en involution. C'est une involution de tangentes conjuguées à l'hyperboloïde (H); par suite l'un des rayons doubles est la génératrice m_1, ou la tangente à la biquadratique au point M_1.

3. Les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC sont coupés par une transversale m issue du point M, aux points A_1, B_1, C_1; les sommets A, B, C sont projetés de M suivant les droites a, b, c; on a

$$(MA_1 B_1 C_1) = (mabc),$$

car si M_1 est le point (BC, AM) on a

$$(MA_1 B_1 C_1) = (M_1 A_1 CB) = (amcb) = (mabc).$$

4. Les faces BCD, ACD, ABD, ABC déterminent

sur la tangente m_1 les points A_1, B_1, C_1, D_1 situés respectivement sur R_1Q_1, RQ, RQ_1, R_1Q; on désigne par K_1 le point (m_1, PP_1); la propriété 3, appliquée successivement aux triangles PP_1Q, PP_1Q_1, et à la transversale m_1 issue du point M_1, donne

$$(mq_1pp_1) = (M_1K_1A_1C_1),$$
$$(mqp_1p) = (M_1K_1D_1B_1).$$

D'après le n° 2, on a

$$(mq_1pp_1) = (mqp_1p),$$

donc

$$(M_1K_1A_1C_1) = (M_1K_1D_1B_1) = (K_1M_1B_1D_1),$$

et le point K_1 est le conjugué de M_1 dans l'involution (A_1B_1, C_1D_1). On déduit de là la construction du plan μ_1, osculateur en M_1 à la biquadratique. On détermine le conjugué K_1 du point M_1 dans l'involution (A_1B_1, C_1D_1), la droite K_1PP_1 issue de ce point K_1 et s'appuyant sur les arêtes opposées AB, CD du tétraèdre ABCD, est dans le plan osculateur cherché [1].

5. Le plan osculateur μ_1 coupe le cône de sommet D, perspectif à la biquadratique, suivant une conique Σ tangente en M_1 à la droite m_1 et conjuguée au triangle P_1Q_1R. Le rayon de courbure de cette conique Σ, qui est aussi celui de la biquadratique, est donné par la formule (n° 1) :

$$\rho = \frac{M_1A_1 . M_1B_1}{A_1B_1} \frac{\sin(rq_1)}{\sin(m_1r)\sin(m_1q_1)}.$$

Les droites $r \equiv M_1R$, $q_1 \equiv M_1Q_1$ sont les traces sur le plan μ_1 des plans M_1AD, M_1BD; on les désignera pour la symétrie des notations par a_1, b_1. Ainsi :

---

[1] C. Servais, *Sur le complexe tétraédral* (*Mathesis*, 3e série, t. IX, p. 7).

Une biquadratique gauche de première espèce étant déterminée par le tétraèdre conjugué ABCD, *le point* M_1 *et la tangente* m_1 *en ce point, le rayon de courbure au point* M_1 *de la courbe est donné par la formule*

$$\rho = \frac{M_1A_1 . M_1B_1}{A_1B_1} \frac{\sin(a_1 b_1)}{\sin(m_1 a_1)\sin(m_1 b_1)},$$

les points A_1, B_1 *sont les traces de la tangente* m_1, *sur les faces* CDB, CDA *du tétraèdre; les droites* a_1, b_1 *sont les traces des plans* M_1DA, M_1DB *sur le plan osculateur* μ_1 *à la courbe.*

6. Le point M_1 détermine sur la biquadratique le quadruple M_1, M_2, M_3, M_4. A ce quadruple correspond, dans l'homologie harmonique ayant pour centre le point A et pour plan d'homologie BCD, le quadruple M'_1, M'_2, M'_3, M'_4. Dans les homologies harmoniques :

$$(B, CDA), \quad (C, DAB), \quad (D, ABC),$$

on a les groupes de points correspondants :

$$\begin{array}{ll} (M'_1, M_2, M_3, M_4), & (M'_2, M'_1, M'_4, M'_3), \\ (M_1, M'_2, M_3, M_4), & (M'_3, M'_4, M'_1, M'_2), \\ (M_1, M_2, M'_3, M_4), & (M'_4, M'_3, M'_2, M'_1). \end{array}$$

La biquadratique gauche est projetée du point M_1 sur le plan μ_1 suivant une cubique plane; pour la facilité les projections des points considérés seront indiquées par les notations de ces points. La tangente m'_1 à la biquadratique gauche au point M'_1 rencontre les tangentes m_1, m_2, m_3, m_4 à la même courbe aux points M_1, M_2, M_3, M_4; par suite les points M_1, M_2, M_3, M_4 de la cubique forment un quadruple sur cette courbe; son tangentiel est la trace M'_1 de m'_1 sur le plan μ_1. Cette trace est la projection du point M'_1 de la biqua-

dratique sur le plan μ_1. Les homologies considérées plus haut montrent que les points M_1, M_4, M'_1, M'_4 de la biquadratique sont dans le plan ADM_1; donc les points M_1, M_4, M'_1 de la cubique plane sont sur la droite a_1 intersection des plans μ_1 et ADM_1 (n° 5). De même les points M_1, M_3, M'_2 de la cubique sont sur la droite b_1, intersection des plans μ_1 et BDM_1. Le rayon de courbure de la cubique plane égal à celui de la biquadratique est donc donné par la formule du n° 5. Par suite :

Soient M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 *un quadruple d'une cubique plane.* M_1 *le point de la courbe ayant* M'_4 *pour tangentiel ;* A_1, B_1 *les points d'intersection de la tangente* m_1 *au point* M_1 *avec les tangentes aux points* M'_1, M'_2; a_1, b_1 *les droites* $M_1M'_1$, $M_1M'_2$; *le rayon de courbure de la cubique au point* M_1 *est donné par la formule*

$$\rho = \frac{M_1A_1.M_1B_1}{A_1B_1}\,\frac{\sin(a_1b_1)}{\sin(m_1a_1)\sin(m_1b_1)}.$$

7. Les quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 de la cubique formant un quadruple, le triangle $M_2M_3M_4$ est conjugué à la conique polaire du point M_1. Le rayon de courbure au point M_1 de cette conique est donné par la formule

$$\rho' = \frac{M_1A_2.M_1B_2}{A_2B_2}\,\frac{\sin(a_1b_1)}{\sin(m_1a_1)\sin(m_1b_1)},$$

A_2, B_2 sont les points (m_1, M_2M_3) (m_1, M_2M_4), a_1, b_1 les droites $M_1M_4M'_1$, $M_1M_3M'_2$. On sait que le rayon de courbure ρ de la cubique au point M_1 est égal à la moitié de ρ'; par suite :

Si M_1, M_2, M_3, M_4 *est un quadruple d'une cubique plane, le rayon de courbure de la courbe au point*

M_1 *est donné par la formule*

$$\rho = \frac{1}{2}\,\frac{MA_2.MB_2}{A_2B_2}\,\frac{\sin(a_1b_1)}{\sin(m_1a_1)\sin(m_1b_1)},$$

A_2, B_2 *sont les points de rencontre de la tangente* m_1 *au point* M_1 *avec les droites* M_2M_3, M_2M_4; a_1, b_1 *les droites* M_1M_4, M_1M_3.

8. Des n°s 6 et 7 on déduit

$$2\frac{MA_1.MB_1}{A_1B_1} = \frac{M_1A_2.M_1B_2}{A_2B_2}.$$

Ainsi : *Soient* M_1, M_2, M_3, M_4 *un quadruple d'une cubique plane*; M'_1, M'_2, M'_3 *respectivement les points* (M_1M_4, M_2M_3), (M_1M_3, M_2M_4), (M_1M_2, M_3M_4); A_1, B_1 *les points de rencontre de la tangente* m_1 *au point* M_1 *avec les tangentes aux points* M'_1, M'_2; A_2, B_2 *les points de rencontre de* m_1 *avec les droites* M_2M_3, M_2M_4, *on a*

$$2\frac{MA_1.MB_1}{A_1B_1} = \frac{MA_2.MB_2}{A_2B_2}.$$

9. Si C_1, C_2 sont les points de rencontre de la tangente m_1 avec la tangente au point M'_3 et la droite M_3M_4 on a de même

$$2\frac{MA_1.MC_1}{A_1C_1} = \frac{MA_2.MC_2}{A_2C_2}.$$

On déduit des deux dernières égalités

$$(M_1A_1B_1C_1) = (M_1A_2B_2C_2).$$

On peut établir autrement cette dernière propriété et déterminer le second point double de la projectivité déterminée par les trois couples de points A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2. Le tangentiel T du quadruple M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 est le corésiduel du groupe M_1, M_2, M_3, M_4, et le point

M'_4 est le tangentiel du quadruple $M_1 M_2 M_3 M_4$. Les coniques circonscrites au quadrangle $M_1 M_2 M_3 M_4$ rencontrent la cubique en des couples de points EF alignés sur T et la droite EF engendre un faisceau projectif au faisceau de coniques. Parmi ces coniques on considère les coniques dégénérées $(M_1 M_4, M_2 M_3)$, $(M_1 M_3, M_2 M_4)$, $(M_1 M_2, M_3 M_4)$, la conique tangente à la cubique au point M_1 et celle qui passe par M'_4. Elles coupent une seconde fois la droite m_1 issue de M_1 aux points A_2, B_2, C_2, M_1, M'_4. Les rayons homologues du faisceau (T) sont TM'_1, TM'_2, TM'_3, TM_1, TM'_4; par suite

$$(A_1 B_1 C_1 M_1 M'_4) \overline{\wedge} (A_2 B_2 C_2 M_1 M'_4).$$

Soient M_1, M_2, M_3, M_4 *un quadruple ayant pour tangentiel* M'_4; M'_1, M'_2, M'_3 *les points* $(M_1 M_4, M_2 M_3)$, $(M_1 M_3, M_2 M_4)$, $(M_1 M_2, M_3 M_4)$; A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 *les points de rencontre de la tangente* $M_1 M'_4$ *respectivement avec les tangentes aux points* M'_1, M'_2, M'_3 *et les droites* $M_2 M_3$, $M_4 M_2$, $M_3 M_4$; *on a*

$$(A_1 B_1 C_1 M_1 M'_4) \overline{\wedge} (A_2 B_2 C_2 M_1 M'_4).$$

10. La tangente m_1 au point M_1 de la biquadratique gauche est une génératrice d'un hyperboloïde (H) circonscrit à la courbe; soient s une génératrice de même système que m_1; M', P, Q trois points de la biquadratique μ', α_1, β_1 les plans $m_1 M'$, $m_1 P$, $m_1 Q$; P', Q', les traces de la droite $M_1 M'$ sur les plans sP, sQ. On a

$$s(M_1 P M' Q) \overline{\wedge} m_1(M_1 P M' Q)$$

ou

$$(M_1 P' M' Q') \overline{\wedge} (\mu_1 \alpha_1 \mu' \beta_1).$$

De cette égalité on déduit

$$\frac{M_1 M'}{\sin(\mu_1 \mu')} = \frac{M'P' . M_1 Q'}{P'Q'} \frac{\sin(\alpha_1 \beta_1)}{\sin(\mu' \alpha_1) \sin(\mu_1 \beta_1)}.$$

Si l'on suppose que le point M′ se rapproche indéfiniment de M_1 à la limite on a

$$\tau = \frac{1}{3}\,\frac{M_1P_1 . M_1Q_1}{P_1Q_1}\,\frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\mu_1\alpha_1)\sin(\mu_1\beta_1)},$$

τ est le rayon de torsion de la courbe au point M_1; P_1, Q_1 les traces m_1 sur les plans sP, sQ.

11. Les points P et Q étant quelconques sur la biquadratique, on peut leur substituer les points M'_1, M'_2 de la courbe situés respectivement sur les droites AM_1, BM_1 joignant le point M_1 aux sommets A, B du tétraèdre conjugué. A la droite PP_1 génératrice de (H) il faudra substituer la génératrice analogue issue de M'_1; cette droite n'est autre que la tangente m'_1 à la courbe au point M'_1; elle correspond à la droite m_1 dans l'homologie harmonique (A, BCD), par conséquent le point $m_1\,m'_1$ analogue à P_1 est le point $A_1 \equiv (m_1, BCD)$. De même l'analogue de Q_1 est le point $B_1 \equiv (m_1, ACD)$; quant aux plans $m_1\,M'_1$ et $m_1\,M'_2$ ils sont identiques à m_1 A et m_1 B. Par suite :

Une biquadratique gauche de première espèce étant déterminée par le tétraèdre conjugué ABCD, *le point* M_1 *et la tangente* m_1 *en ce point, le rayon de torsion au point* M_1 *de cette courbe est donné par la formule*

$$\tau = \frac{1}{3}\,\frac{M_1A_1 . M_1B_1}{A_1B_1}\,\frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\mu_1\alpha_1)\sin(\mu_1\beta_1)};$$

les points A_1, B_1 *sont les traces de la tangente* m_1 *sur les faces* CDB *et* CDA *du tétraèdre; les plans* α_1, β_1 *projettent de la tangente* m_1 *les sommets* A, B; μ_1 *est le plan osculateur à la courbe du point* M_1.

12. *Lemme.* — Soient P_1, M_1, M_2, P_2 les sommets d'un

quadrilatère gauche; α_1, μ_1, μ_2, α_2 les plans $P_2 P_1 M_1$, $P_1 M_1 M_2$, $M_1 M_2 P_2$, $M_2 P_2 P_1$; on a

$$\begin{aligned} &P_1 P_2 . M_1 M_2 \sin(\mu_1 \alpha_1) \sin(\mu_2 \alpha_2) \\ &\quad = M_1 P_1 . M_2 P_2 \sin(\alpha_1 \alpha_2) \sin(\mu_1 \mu_2). \end{aligned}$$

Soient m_1, m_2, f_1, g_1, a_1 les droites $P_1 M_1$, $P_2 M_2$, $P_1 P_2$, $M_1 M_2$, $M_1 P_2$. Dans les trièdres $(g_1 a_1 m_1)$, et $(f_1 a_1 m_2)$, et les triangles $P_1 P_2 M_1$ et $P_2 M_1 M_2$ on a

$$\frac{\sin(\mu_1 \alpha_1)}{\sin(a_1 g_1)} = \frac{\sin(\mu_1 \mu_2)}{\sin(a_1 m_1)}, \qquad \frac{\sin(\mu_2 \alpha_2)}{\sin(f_1 a_1)} = \frac{\sin(\alpha_1 \alpha_2)}{\sin(m_2 a_1)},$$

$$\frac{\sin(f_1 a_1)}{\sin(a_1 m_1)} = \frac{M_1 P_1}{P_1 P_2}, \qquad \frac{\sin(a_1 g_1)}{\sin(m_2 a_1)} = \frac{M_2 P_2}{M_1 M_2};$$

donc

$$\begin{aligned} &P_1 P_2 . M_1 M_2 \sin(\mu_1 \alpha_1) \sin(\mu_2 \alpha_2) \\ &\quad = M_1 P_1 . M_2 P_2 \sin(\alpha_1 \alpha_2) \sin(\mu_1 \mu_2). \end{aligned}$$

13. Soient M_1, M_2 deux points correspondants d'une biquadratique gauche; les tangentes m_1, m_2 en ces points sont deux génératrices de même système d'une quadrique (H) circonscrite à la courbe. Les rayons d'osculation p_1, p_2 en ces points sont deux génératrices de l'autre système; si q est une génératrice de ce système, on désigne par P_1, Q_1, P_2, Q_2 les points $m_1 p_2$, $m_1 q$, $m_2 p_1$, $m_2 q$; par α_1, β_1, μ_1, α_2, β_2, μ_2 les plans $(m_1 p_2)$, $(m_1 q)$, $(m_1 p_1)$, $(m_2 p_1)$, $(m_2 q)$, $(m_2 p_2)$; par τ_1 et τ_2 les rayons de torsion de la biquadratique aux points M_1 et M_2. Cela étant on a (10)

$$\begin{aligned} 9\tau_1\tau_2 = &\frac{M_1 P_1 . M_1 Q_1 . M_2 P_2 . M_2 Q_2}{P_1 Q_1 . P_2 Q_2} \\ &\times \frac{\sin(\alpha_1 \beta_1) \sin(\alpha_2 \beta_2)}{\sin(\mu_1 \alpha_1) \sin(\mu_1 \beta_1) \sin(\mu_2 \alpha_2) \sin(\mu_2 \beta_2)}. \end{aligned}$$

Dans les quadrilatères gauches $P_1 M_1 M_2 P_2$, $M_1 Q_1 Q_2 M_2$

et $P_1 Q_1 Q_2 P_1$ on a

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} &P_1P_2 . M_1M_2 \sin(\mu_1\alpha_1)\sin(\mu_2\alpha_2)\\ &\quad = M_1P_1 . M_2P_2 \sin(\alpha_1\alpha_2)\sin(\mu_1\mu_2),\\ &Q_1Q_2 . M_1M_2 \sin(\alpha_1\beta_1)\sin(\alpha_2\beta_2)\\ &\quad = M_1Q_1 . M_2Q_2 \sin(\alpha_1\alpha_2)\sin(\beta_1\beta_2),\\ &P_1P_2 . Q_1Q_2 \sin(\mu_1\beta_1)\sin(\mu_2\beta_2)\\ &\quad = P_1Q_1 . P_2Q_2 \sin(\mu_1\mu_2)\sin(\beta_1\beta_2); \end{aligned}\right.$$

par suite

$$9\tau_1\tau_2 = \frac{\overline{P_1P_2}^2}{\sin^2(\mu_1\mu_2)}\,\frac{\overline{M_1Q_1}^2 . \overline{M_2Q_2}^2}{\overline{P_1Q_1}^2 . \overline{P_2Q_2}^2}.$$

Ainsi : *Si* m_1, μ_1, τ_1 *et* m_2, μ_2, τ_2 *désignent les tangentes, les plans osculateurs et les rayons de torsion d'une biquadratique gauche en deux points correspondants* M_1 *et* M_2; P_1 *et* P_2 *les points* $m_1\mu_2$, $m_2\mu_1$; Q_1, Q_2 *les points d'appui sur* m_1 *et* m_2 *d'une sécante issue d'un point quelconque de la courbe, on a*

$$9\tau_1\tau_2 = \frac{\overline{P_1P_2}^2}{\sin^2(\mu_1\mu_2)}\,\frac{\overline{M_1Q_1}^2 . \overline{M_2Q_2}^2}{\overline{P_1Q_1}^2 . \overline{P_2Q_2}^2}.$$

14. Si la quadrique (H) est un paraboloïde, on peut supposer la génératrice q à l'infini, on a dans cette hypothèse

$$9\tau_1\tau_2 = \frac{\overline{P_1P_2}^2}{\sin^2(\mu_1\mu_2)}.$$

Ainsi : *Si les tangentes* m_1 *et* m_2 *en deux points correspondants d'une biquadratique gauche sont des génératrices d'un paraboloïde, on a la relation*

$$9\tau_1\tau_2 = \frac{\overline{P_1P_2}^2}{\sin^2(\mu_1\mu_2)}.$$

15. Si les points correspondants M_1, M_2 sont tels

que le plan osculateur en l'un d'eux passe par l'autre, on a $P_1 \equiv M_1$, $P_2 \equiv M_2$; par suite

$$9\tau_1\tau_2 = \frac{\overline{M_1M_2}^2}{\sin^2(\mu_1\mu_2)}.$$

Donc : *Si les points* M_1, M_2 *de la biquadratique gauche sont tels que le plan osculateur en l'un d'eux passe par l'autre, on a*

$$9\tau_1\tau_2 = \frac{\overline{M_1M_2}^2}{\sin^2(\mu_1\mu_2)}.$$

16. Soient m_1, μ_1, τ_1 la tangente, le plan osculateur et le rayon de torsion en un point M_1 d'une cubique gauche; s, P, Q une sécante et deux points quelconques de la courbe; P_1, Q_1 les traces de m_1 sur les plans sP_1, sQ_1; α_1, β_1 les plans m_1 P, m_1 Q; on a

$$\tau_1 = \frac{1}{3}\,\frac{M_1P_1.M_1Q_1}{P_1Q_1}\,\frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\mu_1\alpha_1)\sin(\mu_1\beta_1)} \quad (^1).$$

On déduit de cette formule les théorèmes suivants :

Si m_1, μ_1, τ_1 *et* m_2, μ_2, τ_2 *désignent les tangentes, les plans osculateurs et les rayons de torsion d'une cubique gauche en deux points quelconques* M_1 *et* M_2; P_1 *et* P_2 *les points* $m_1\mu_2$, $m_2\mu_1$; Q_1, Q_2 *les points d'appui sur* m_1 *et* m_2 *d'une droite issue d'un point de la courbe arbitrairement choisi, on a*

$$9\tau_1\tau_2 = \frac{\overline{P_1P_2}^2}{\sin^2(\mu_1\mu_2)}\,\frac{\overline{M_1Q_1}^2.\overline{M_2Q_2}^2}{\overline{P_1Q_1}^2.\overline{P_2Q_2}^2}.$$

Si les tangentes m_1 *et* m_2 *sont des génératrices d'un paraboloïde circonscrit à la cubique gauche,*

---

(1) C. Servais, *Sur la courbure des coniques et des cubiques gauches* (*Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, 1906, p. 12).

on a

$$9\tau_1\tau_2 = \frac{\overline{P_1P_2}^2}{\sin^2(\mu_1\mu_2)}.$$

17. Les égalités (a) du n° 13 permettent d'écrire la valeur de l'expression $9\tau_1\tau_2$ sous la forme suivante

$$9\tau_1\tau_2 = \frac{\overline{M_1M_2}^2}{\sin^2(\alpha_1\alpha_2)}\,\frac{\sin^2(\alpha_1\beta_1)\sin^2(\alpha_2\beta_2)}{\sin^2(\mu_1\beta_1)\sin^2(\mu_2\beta_2)},$$

on peut utiliser cette relation dans les n°s 13 et 16.

18. *Soient* (C_1) *et* (C_2) *deux courbes gauches quelconques*, m_1, μ_1, τ_1 *et* m_2, μ_2, τ_2 *les tangentes, les plans osculateurs et les rayons de torsion en deux points* M_1, M_2 *situés respectivement sur* (C_1) *et* (C_2); P_1, P_2 *les points* $m_1\mu_2$, $m_2\mu_1$; Q_1, Q_2 *deux points quelconques pris respectivement sur* m_1 *et* m_2; *l'expression*

$$\frac{1}{\tau_1\tau_2}\,\frac{\overline{P_1P_2}^2}{\sin^2(\mu_1\mu_2)}\,\frac{\overline{M_1Q_1}^2.\overline{M_2Q_2}^2}{\overline{P_1Q_1}^2.\overline{P_2Q_2}^2},$$

est projective.

Soient α_1, β_1, α_2, β_2 les plans m_1M_2, m_1Q_2, m_2M_1 m_2Q_1; à la figure considérée correspond, dans une projectivité quelconque, une seconde figure dont les éléments seront représentés par les notations des éléments homologues de la première, mais accentuées. Pour les courbes (C_1) et (C'_1), (C_2) et (C'_2) on a [1]

$$\frac{1}{\tau_1}\,\frac{M_1P_1.M_1Q_1}{P_1Q_1}\,\frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\mu_1\alpha_1)\sin(\mu_1\beta_1)}$$
$$= \frac{1}{\tau'_1}\,\frac{M'_1P'_1.M'_1Q'_1}{P'_1Q'_1}\,\frac{\sin(\alpha'_1\beta'_1)}{\sin(\mu'_1\alpha'_1)\sin(\mu'_1\beta'_1)},$$
$$\frac{1}{\tau_2}\,\frac{M_2P_2.M_2Q_2}{P_2Q_2}\,\frac{\sin(\alpha_2\beta_2)}{\sin(\mu_2\alpha_2)\sin(\mu_2\beta_2)}$$
$$= \frac{1}{\tau'_2}\,\frac{M'_2P'_2.M'_2Q'_2}{P'_2Q'_2}\,\frac{\sin(\alpha'_2\beta'_2)}{\sin(\mu'_2\alpha'_2)\sin(\mu'_2\beta'_2)}.$$

---

[1] C. Servais, *La courbure et la torsion dans la collinéation et*

Ces égalités montrent que l'expression

$$T \equiv \frac{1}{\tau_1 \tau_2} \frac{M_1 P_1 . M_1 Q_1 . M_2 P_2 . M_2 Q_2}{P_1 Q_1 . P_2 Q_2} \times \frac{\sin(\alpha_1 \beta_1) \sin(\alpha_2 \beta_2)}{\sin(\mu_1 \alpha_1) \sin(\mu_2 \alpha_2) \sin(\mu_1 \beta_1) \sin(\mu_2 \beta_2)}$$

est projective.

D'après les égalités (a) du n° 13 l'expression T peut s'écrire

$$T \equiv \frac{1}{\tau_1 \tau_2} \frac{\overline{P_1 P_2}^2}{\sin^2(\mu_1 \mu_2)} \frac{\overline{M_1 Q_1}^2 . \overline{M_2 Q_2}^2}{\overline{P_1 Q_1}^2 . \overline{P_2 Q_2}^2},$$

on a aussi

$$T \equiv \frac{1}{\tau_1 \tau_2} \frac{\overline{M_1 M_2}^2}{\sin^2(\alpha_1 \alpha_2)} \frac{\sin^2(\alpha_1 \beta_1) \sin^2(\alpha_2 \beta_2)}{\sin^2(\mu_1 \beta_1) \sin^2(\mu_2 \beta_2)}.$$

Ces expressions sont donc projectives.

19. Si l'on suppose Q_1 et Q_2 à l'infini, T se réduit à

$$\frac{1}{\tau_1 \tau_2} \frac{\overline{P_1 P_2}^2}{\sin^2(\mu_1 \mu_2)}.$$

Cette expression n'est donc pas altérée par une transformation affine.

20. Si les plans osculateurs en M_1 et M_2 passent respectivement par les points M_2 et M_1, on a $P_1 \equiv M_1$, $P_2 \equiv M_2$ et l'expression T se réduit à :

$$\frac{1}{\tau_1 \tau_2} \frac{\overline{M_1 M_2}^2}{\sin^2(\mu_1 \mu_2)} \quad (^1);$$

Cette expression est donc projective.

---

la reciprocité (*Mémoires in-8 de l'Académie royale de Belgique*, 1898, p. 7).

(¹) Demoulin, *Sur la théorie générale des congruences rectilignes* (*Comptes rendus*, 1900, p. 1702).

21. Soient M_1, P_1, Q_1 trois points quelconques d'une génératrice m_1 d'une quadrique Σ; μ_1, α_1, β_1 les plans tangents en ces points; R_1, R'_1 les rayons de courbure principaux de la surface Σ au point M_1; on a

$$R_1 R'_1 = -\frac{\overline{M_1 P_1}^2 . \overline{M_1 Q_1}^2}{\overline{P_1 Q_1}^2} \frac{\sin^2(\alpha_1 \beta_1)}{\sin^2(\mu_1 \alpha_1) \sin^2(\mu_1 \beta_1)} \quad (^1).$$

On déduit de cette formule, par les égalités (a) du n° 13, les théorèmes suivants :

Soient M_1 *et* M_2 *deux points quelconques d'une quadrique* Σ; m_1 *et* a_1, m_2 *et* a_2 *les génératrices passant par ces points*; b *une génératrice du système* $(a_1, a_2, \ldots)$; P_1, P_2, Q_1, Q_2 *les points* $m_1 a_2$, $m_2 a_1$, $m_1 b$, $m_2 b$; R_1 *et* R'_1, R_2 *et* R'_2 *les rayons de courbure principaux aux points* M_1 *et* M_2; μ_1 *et* μ_2 *les plans tangents à* Σ *en* M_1 *et* M_2; *on a*

$$R_1 R'_1 . R_2 R'_2 \sin^4(\mu_1 \mu_2) = \overline{P_1 P_2}^4 \frac{\overline{M_1 Q_1}^4 . \overline{M_2 Q_2}^4}{\overline{P_1 Q_1}^4 . \overline{P_2 Q_2}^4}.$$

Si la quadrique Σ *est un paraboloïde, on a*

$$R_1 R'_1 . R_2 R'_2 \sin^4(\mu_1 \mu_2) = \overline{P_1 P_2}^4.$$

[12e]

GÉNÉRALISATION D'UNE FORMULE DE LAPLACE RELATIVE AUX PROBABILITÉS DES ERREURS;

PAR M. LE LIEUTENANT MONFRAIX.

Laplace a donné de la probabilité pour que la somme des erreurs faites dans n observations soit numérique-

(1) C. SERVAIS, *La courbure et la torsion*, etc., p. 40.

ment égale à x, la formule très générale suivante :

$$2A = \frac{2}{\pi} dx \int_0^x \cos(\alpha x)\, d\alpha \left[2 \int_0^x \varphi(x) \cos(\alpha x)\, dx \right]^n,$$

dans laquelle $\varphi(x)$ est la loi de probabilité des erreurs dans une épreuve, x la limite positive de ces erreurs. Pour la démonstration de cette formule et les conséquences intéressantes que l'on peut en tirer nous renvoyons à un article de M. Hélie publié dans le *Mémorial de l'Artillerie navale*, t. III, 1875.

Nous nous proposons dans ce qui va suivre de résoudre le problème plus général suivant :

Supposons que dans une mesure l'erreur soit la résultante d'un très grand nombre d'erreurs ayant respectivement pour loi de probabilité

$$\varphi_1(x_1), \quad \varphi_2(x_2), \quad \ldots, \quad \varphi_n(x_n),$$

et soient

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n$$

leurs limites. Quelle est la probabilité pour que l'erreur résultante soit numériquement égale ou inférieure à un nombre donné?

Partageons les intervalles

$$-x_1 x_1, \quad -x_2 x_2, \quad \ldots, \quad -x_n x_n$$

en intervalles partiels d'étendue $d\xi$ et considérons les polynomes

$$\sum_1^{m_1} k_1 (e^{k_1 i\alpha d\xi} + e^{-k_1 i\alpha d\xi})\, \varphi_1(k_1\, d\xi)\, d\xi;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_1^{m_n} k_n (e^{k_n i\alpha d\xi} + e^{-k_n i\alpha d\xi})\, \varphi_n(k_n\, d\xi)\, d\xi;$$

$m_1, m_2, \ldots, m_n$ sont des entiers tels que

$$m_1\, d\xi = x_1, \qquad m_2\, d\xi = x_2, \qquad \ldots, \qquad m_n\, d\xi = x_n.$$

A des infiniment petits près tels que

$$2\varphi_1(0)\,d\xi,\quad 2\varphi_2(0)\,d\xi,\quad \ldots,\quad 2\varphi_n(0)\,d\xi,$$

ces polynomes ont respectivement pour valeur

$$2\int_0^{x_1}\varphi_1(x)\cos\alpha x\,dx,\quad \ldots,\quad 2\int_0^{x_n}\varphi_n(x)\cos\alpha x\,dx.$$

Un terme quelconque de leur produit sera de la forme

$$e^{(\sigma_1 d\xi+\sigma_2 d\xi+\ldots+\sigma_n d\xi)i\alpha}\,\varphi_1(\sigma_1 d\xi)\,d\xi\ldots\varphi_n(\sigma_n d\xi)\,d\xi.$$

Or le produit

$$\varphi_1(\sigma_1 d\xi)\,d\xi\ldots\varphi_n(\sigma_n d\xi)\,d\xi$$

représente la probabilité du concours des erreurs

$$\sigma_1 d\xi\ldots\sigma_n d\xi,$$

et nous pourrons dire que la probabilité pour que l'erreur résultante ait une valeur donnée $ld\xi$ est le coefficient de

$$e^{li\alpha d\xi},$$

dans le développement du produit des polynomes considérés.

Soit A ce coefficient; la probabilité d'une erreur numériquement égale à $ld\xi$ sera $2A$. Ce développement sera de la forme

$$A(e^{li\alpha d\xi}+e^{-li\alpha d\xi})+B(e^{pi\alpha d\xi}+e^{-pi\alpha d\xi})+\ldots.$$

Multiplions-le par

$$\frac{e^{li\alpha d\xi}+e^{-li\alpha d\xi}}{2}\,d\alpha=\cos(l\alpha\,d\xi)\,d\alpha.$$

L'un des termes du produit sera $A\,d\alpha$, tous les autres conserveront la même forme et, en intégrant par rap-

port à α de 0 à $\frac{\pi}{d\xi}$, nous aurons

$$A\frac{\pi}{d\xi} = \int_0^{\frac{\pi}{d\xi}} \cos(l\alpha\, d\xi)\, d\xi \left[2^n \int_0^{x_1} \varphi_1(x)\cos(\alpha x)\, dx \right.$$
$$\left. \times \int_0^{x_2} \cdots \int_0^{x_n} \varphi_n(x)\cos(\alpha x)\, dx \right].$$

Si le nombre des erreurs composantes est très grand, l aura une très grande valeur et $d\xi$ étant infiniment petit nous pourrons remplacer le produit indéterminé $ld\xi$ par x, de sorte que

$$2A = \frac{2}{\pi} d\xi \int_0^{\infty} \cos(\alpha x)\, d\alpha \left[2^n \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \cdots \int_0^{x_n} \right],$$

expression d'où l'on déduit la formule de Laplace si l'on suppose que toutes les erreurs composantes suivent la même loi de probabilité.

Admettons que ces erreurs suivent la loi de Gauss et posons

$$\varphi(x) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2x^2}, \qquad X = x.$$

a prenant les valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Nous aurons, en appliquant une formule connue,

$$2\int_0^{\infty} \frac{a}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2x^2} \cos(\alpha x)\, dx = e^{-\frac{\alpha^2}{4a^2}}$$

et, par suite,

$$A = \frac{dx}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 \sum \frac{1}{4a_i^2}} \cos(\alpha x)\, d\alpha$$

et

$$A = dx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\sum \frac{1}{a_i^2}}} e^{-\frac{x^2}{\sum \frac{1}{a_i^2}}}.$$

Posons

$$\frac{1}{a^2} = \sum \frac{1}{a_1^2},$$

nous aurons

$$A = \frac{a}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2x^2} dx.$$

Ceci nous montre que l'erreur résultante suit la loi de Gauss [1] et qu'on peut la considérer comme due à une épreuve isolée dont la précision a est donnée par la relation

$$\frac{1}{a^2} = \sum \frac{1}{a_1^2}.$$

Reprenons la relation

$$A = \frac{dx}{\pi} \int_0^\infty \cos(\alpha x)\, d\alpha \left[2^n \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \cdots \int_0^{x_n} \right],$$

elle représente la probabilité d'une erreur totale égale à x, la probabilité d'une erreur totale numériquement inférieure à x aura pour valeur

$$H = \frac{2}{\pi} \int_0^x dx \int_0^\infty \cos(\alpha x)\, d\alpha \left[2^n \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \cdots \int_0^{x_n} \right]$$

ou

$$H = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha} d\alpha \left[2^n \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \cdots \int_0^{x_n} \right].$$

La somme des erreurs est nécessairement inférieure à $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ en valeur absolue; la probabilité d'une erreur inférieure à Σx_1 est donc égale à 1 et nous

---

[1] Nous rappellerons que la démonstration directe de ce théorème a été donnée par M. d'Ocagne (*Nouvelles Annales*, 3e série, t. XIV, 1895, p. 133).

aurons

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha(x_1 - x_2 + \ldots + x_n)}{\alpha} d\alpha$$
$$\times \Omega \left[2 \int_0^{x_1} \varphi_1(x) \cos(\alpha x)\, dx \right],$$

Ω désignant le produit des diverses intégrales. La seule hypothèse faite sur les fonctions φ est que

$$2 \int_0^X \varphi(x)\, dx = 1;$$

on a en effet la certitude que l'une des erreurs est numériquement inférieure à sa limite.

Nous poserons

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{2 \int_0^X f(x)\, dx},$$

$f(x)$ étant une fonction quelconque continue entre o et x. La relation ci-dessus deviendra

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha(x_1 - x_2 + \ldots + x_n)}{\alpha} d\alpha\, \Omega \frac{\int_0^{x_1} f_1(x) \cos \alpha x\, dx}{\int_0^{x_1} f_1(x)\, dx}.$$

Si en particulier toutes les fonctions f_1 sont des constantes, il restera

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x_1}{\alpha x_1} \frac{\sin \alpha x_2}{\alpha x_2} \cdots \frac{\sin \alpha(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}{\alpha} d\alpha = \frac{\pi}{2},$$

dont l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin n\alpha}{\alpha} \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^n = \frac{\pi}{2}$$

est un cas particulier.

[N'1f]

SUR UN COMPLEXE QUADRATIQUE DONT TOUS LES CÔNES SONT DE RÉVOLUTION;

PAR M. É. TURRIÈRE.

1. Dans mon article intitulé *Une application du théorème de Malus au problème de Transon* (*Nouvelles Annales*, 1911, p. 160), j'ai considéré un complexe de droites (C) tel que tout cône du complexe admette un axe de symétrie binaire, ou plusieurs axes de cette nature. Si le complexe (C) est le complexe linéaire, tout cône du complexe admet un axe de symétrie perpendiculaire au plan focal au foyer correspondant et une infinité d'autres axes qui sont des rayons du complexe (C) lui-même.

Ce cas singulier n'est pas le seul pour lequel tout cône admet une infinité d'axes de symétrie. Soit en effet le complexe quadratique (C) d'équation

$$\begin{aligned}&(a_1p_1+a_2p_2+a_3p_3+a_4p_4+a_5p_5+a_6p_6)^2\\&\quad=a^2(p_1^2+p_2^2+p_3^2),\end{aligned}$$

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a$ désignant sept constantes arbitraires. Tout cône de ce complexe de sommet M est bitangent au cône isotrope de même sommet le long des deux génératrices situées dans le plan focal de M par rapport au complexe linéaire (Γ) d'équation

$$a_1p_1+a_2p_2+a_3p_3+a_4p_4+a_5p_5+a_6p_6=0;$$

en d'autres termes, *tout cône du complexe* (C) *est de*

révolution ; l'axe de révolution est la perpendiculaire en M au plan focal de ce point par rapport au complexe linéaire (Γ). En se reportant donc à l'article précédemment cité, on voit qu'on peut associer au complexe (C) deux complexes (C') : l'un d'eux n'est autre que le complexe linéaire (Γ) et l'autre est le complexe quadratique constitué par les perpendiculaires aux plans focaux de (Γ) aux foyers correspondants.

Il suffit donc de connaître une solution du problème de Transon relatif au complexe (C) précédent pour pouvoir considérer ce problème comme étant résolu.

Cette propriété découle d'ailleurs d'autres remarques; avant de les indiquer et de former la solution la plus générale, il convient de réduire l'équation du complexe (C) à la forme la plus simple. A cet effet, il suffit, par un changement d'axes, de prendre pour axe Oz l'axe du complexe linéaire (Γ) associé au complexe (C). L'équation de (C) prend alors la forme

$$(p_6 + Kp_3)^2 = a^2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2):$$

la constante K est nulle si le complexe (Γ) est spécial, c'est-à-dire si l'expression

$$a_1 a_4 + a_2 a_5 + a_3 a_6$$

est nulle.

2. Le complexe (C), tout comme le complexe linéaire (Γ) auquel il se réduit lorsque la constante a est nulle, est invariant dans la translation infinitésimale parallèle à l'axe Oz et dans la rotation infinitésimale autour du même axe. L'équation des surfaces dont les normales appartiennent au complexe (C) admet donc trois transformations infinitésimales distinctes : l'une est la transformation caractéristique, d'après Lie, des équations de cette nature : la dilatation infinitésimale; les deux

autres sont celles qui correspondent aux deux déplacements infinitésimaux précédents.

Dans ces conditions, puisque la connaissance de deux transformations infinitésimales est suffisante pour déduire la solution générale d'une solution particulière unique, nous nous trouvons en présence d'un nombre surabondant de transformations infinitésimales. Pour engendrer la trajectoire la plus générale du complexe (C), il suffit donc de prendre l'enveloppe d'une famille de surfaces prises arbitrairement parmi les parallèles aux surfaces déduites, par un déplacement hélicoïdal infinitésimal, d'axe Oz et de pas arbitraire, d'une trajectoire particulière.

Comme solution particulière, on pourra envisager la surface (S) qui va être considérée plus loin.

3. En se reportant au Chapitre de ma Thèse [1] relatif aux complexes de translation ou de révolution, on voit qu'il convient d'utiliser les coordonnées géographiques pour déterminer le plus simplement possible les surfaces trajectoires du complexe (C). Considérée comme enveloppe d'un plan d'équation

$$x \cos\varphi \cos\psi + y \cos\varphi \sin\psi + z \sin\varphi = \varpi,$$

la trajectoire générale est intégrale de l'équation du premier ordre [2]

$$\frac{\partial \varpi}{\partial \psi} + \mathrm{K} \sin\varphi = a:$$

---

[1] *Sur les congruences de normales qui appartiennent à un complexe donné* (Paris, 1911, et *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*).

[2] D'une façon précise, le complexe quadratique (C) se décompose en deux complexes *semi-linéaires* (*Cf.* le Chapitre corres-

conformément à la théorie générale, celle-ci s'intègre immédiatement et l'intégrale générale est

$$\varpi = (a - k \sin \varphi) \psi + \Phi;$$

Φ désigne une fonction arbitraire d'intégration de la seule variable φ.

De cette expression générale résulte une génération géométrique simple de la surface trajectoire générale du complexe (C), faisant intervenir une surface de M. Appell particulière,

$$\varpi = \psi,$$

l'hélicoïde gauche à plan directeur

$$\varpi = \psi \sin \varphi$$

et une surface générale de révolution autour de Oz

$$\varpi = \Phi.$$

Pour solution particulière, on pourra donc prendre la surface (S) d'équation

$$\varpi = (a - k \sin \varphi) \psi,$$

dont les lignes de courbure présentent la particularité intéressante d'admettre pour images sphériques des loxodromies : cette propriété résulte du fait que ϖ est une fonction linéaire de ψ et de $\psi \sin \varphi$ [1].

Parmi les surfaces trajectoires du complexe (C) les

---

pondant de ma Thèse) auxquels correspondent deux familles de surfaces trajectoires intégrales des équations

$$\frac{\partial \varpi}{\partial \psi} + k \sin \varphi = \pm a;$$

[1] *Cf.* mon article intitulé : *Application de l'équation des télégraphistes aux surfaces dont les images sphériques des lignes de courbure sont des loxodromies* (*Nouvelles Annales*, 1910, p. 21).

seules surfaces qui jouissent de cette propriété sont les surfaces qui correspondent à la fonction

$$\Phi = A \sin\varphi + B,$$

A et B étant deux constantes, c'est-à-dire les surfaces déduites de (S) par une translation parallèle à Oz. Pour les autres surfaces trajectoires des droites du complexe, les images sphériques des lignes de courbure ne sont pas des loxodromies, mais ces lignes de courbure sont immédiatement déterminables : leur équation différentielle est, en effet, indépendante de ψ.

L'équation différentielle des lignes de courbure, en coordonnées géographiques d'une surface quelconque, est (Cf. *Nouvelles Annales* de 1910, p. 21) de la forme

$$d\varphi^2 - \cos^2\varphi, \quad d\psi^2 + F(\varphi, \psi), \quad d\varphi\, d\psi = 0.$$

Si l'on suppose que F ne dépende que de φ, les surfaces correspondantes sont intégrales d'une équation aux dérivées partielles linéaires et du second ordre. Les surfaces trajectoires des droites du complexe (C) sont des intégrales particulières. L'interprétation géométrique de cette propriété est la suivante : *les images sphériques de toutes les lignes de courbure de chacun des systèmes se déduisent de l'une d'elles par rotation autour de* Oz.

4. Pour terminer, je ferai observer que l'équation aux dérivées partielles des mêmes surfaces trajectoires du complexe (C) est, en coordonnées ordinaires,

$$\frac{qx - py - K}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = a;$$

on reconnaît là une équation remarquable qui a été étudiée par M. Darboux (*Leçons sur les systèmes*

triple-orthogonaux, p. 86) et considérée de nouveau par M. J. Haag dans sa Thèse (*Familles de Lamé, composées de surfaces égales*, p. 11; *Annales de l'École Normale supérieure*, 1910). M. Darboux a caractérisé les surfaces intégrales de cette équation par la propriété d'être superposables aux surfaces qui leur sont parallèles. M. Haag fait remarquer, en évitant toute intégration, que ces surfaces admettent deux hélicoïdes d'axe Oz et de pas K pour nappes de leur développée. De cette remarque M. Haag déduit une construction simple des congruences de normales de ces surfaces.

P. S. — La lecture des Mémoires de M. E. Keraval, *Sur les surfaces partiellement cylindroïdes*, m'avait amené à écrire un article *Sur les congruences de droites qui admettent un point pour surface centrale* (*Nouvelles Annales*, 1911, p. 165). Je dois ajouter que M. Haag, dans son Mémoire *Sur certains mouvements remarquables et leurs applications* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1910, p. 367), signale comme « très intéressante en elle-même » l'étude de la congruence des génératrices des quadriques de M. Humbert et indique plusieurs propriétés remarquables de cette congruence, celle de la surface centrale notamment.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1911.

Composition de Géométrie analytique et mécanique ;

SOLUTION PAR M. JEAN SERVAIS.

On donne trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz.

1° *Trouver les équations de la parabole* (P) *qui satisfait aux conditions suivantes : son foyer a pour coordonnées* $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$; *son axe est parallèle à* Oy; *elle passe par* O; *enfin elle tourne sa concavité vers les* y *positifs.*

2° *Montrer qu'à chaque point* M *de l'espace correspond, en général, un point* R *de l'axe* Oz *et un seul, autre que* O, *tel que la droite* MR *rencontre* (P). *Calculer* OR *en fonction des coordonnées de* M.

3° *Parmi les droites* MR *ainsi définies, on considère celles qui sont parallèles au plan* $z = lx$. *Trouver et étudier leur lieu géométrique.*

4° *On imagine que* M *soit la position d'un point matériel libre de masse égale à l'unité et que le vecteur* MR *représente la force unique qui agit sur lui.*

Que peut-on dire du mouvement projeté sur le plan xOy?

Que peut-on dire du mouvement lui-même quand la vitesse initiale de M *est dans le plan* MOz?

5° *Faire l'étude complète du mouvement avec les conditions initiales suivantes :*

Coordonnées du point M : $x_0 = -2$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$;

Projections de sa vitesse : $x'_0 = 0$, $y'_0 = 0$, $z'_0 = 3$.

1. La parabole (P) est située dans le plan xOy. Son équation dans ce plan est

$$(x-1)^2 + y^2 = (y+1)^2$$

ou

$$x^2 - 2x - 2y = 0. \tag{1}$$

2. Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées d'un point M de l'espace, z_2 la cote OR du point R.

Les équations de la droite MR sont

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z - z_2}{z_1 - z_2}. \tag{2}$$

Elle coupe le plan xOy au point de coordonnées

$$x = \frac{-x_1 z_2}{z_1 - z_2}, \qquad y = \frac{-y_1 z_2}{z_1 - z_2}, \qquad z = 0.$$

Exprimons que ce point est situé sur la parabole (P) et nous avons

$$\frac{z_2}{z_1 - z_2}\left(\frac{x_1^2 z_2}{z_1 - z_2} + 2x_1 + 2y_1\right) = 0.$$

En supprimant la solution $z_2 = 0$, il reste

$$(x_1^2 - 2x_1 - 2y_1) z_2 + 2z_1(x_1 + y_1) = 0,$$

ce qui donne pour le segment OR

$$z_2 = -\frac{2z_1(x_1 + y_1)}{x_1^2 - 2x_1 - 2y_1}.$$

3. Remplaçons z_2 par sa valeur dans les équations (2)

de la droite MR et il vient

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z(x_1^2 - 2x_1 - 2y_1) + 2z_1(x_1 + y_1)}{z_1 x_1^2}.$$

Exprimons que cette droite est parallèle au plan

$$z = lx.$$

La parallèle menée par l'origine à la droite MR a pour équations

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z(x_1^2 - 2x_1 - 2y_1)}{z_1 x_1^2},$$

on doit donc avoir

$$l = \frac{z_1 x_1}{x_1^2 - 2x_1 - 2y_1},$$

ou

$$x_1(z_1 - lx_1) + 2l(x_1 + y_1) = 0.$$

Comme le point M est un point *quelconque* de la droite MR, l'équation précédente, où l'on considère x_1, y_1, z_1, comme des coordonnées courantes, est l'équation du lieu. C'est un paraboloïde hyperbolique dont les plans directeurs sont

$$x = 0, \qquad z = lx$$

qui passe par Oz et par la parabole (P).

4. Si M est un point matériel de masse 1 soumis à la force

$$F = \overline{MR},$$

son mouvement projeté sur xOy est celui d'un point soumis à une force centrale proportionnelle à la distance, car

$$X = -x, \qquad Y = -y.$$

Si la vitesse est quelconque, la projection de la trajectoire sur le plan xOy est une ellipse de centre O.

Si la vitesse initiale est située dans le plan MOz, sa projection sur le plan xOy passe par O et la trajectoire se projette suivant une droite passant par O. Le mouvement dans l'espace s'effectue *dans le plan* MOz. Mais alors le point où la droite MR rencontre la parabole est un point fixe, intersection (autre que O) du plan MOz avec la parabole.

La force $\overline{MR}$ est donc centrale et le mouvement suit la loi des aires.

5. Si les conditions initiales sont :

Coordonnées de M :

$$x_0 = -2, \qquad y_0 = 0, \qquad z_0 = 0,$$

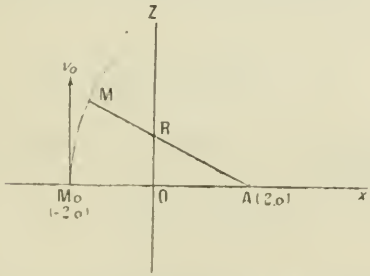
Projections de la vitesse :

$$x'_0 = 0, \qquad y'_0 = 0, \qquad z'_0 = 3,$$

le mouvement a lieu dans le plan xOz.

La droite MR rencontre la parabole (P) au point A, de coordonnées $x = 2$, $z = 0$, situé sur Ox.

Fig. 1.



Soient x, z les coordonnées de M, l'équation de la droite MA (*fig.* 1) est

$$\frac{X-2}{x-2} = \frac{Z}{z}.$$

La cote $\overline{OR}$ du point R est donc

$$X = 0, \qquad Z = \frac{-2z}{x-2}.$$

Les équations du mouvement du point M dans le plan xOz sont donc

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -z - \frac{2z}{x-2} = \frac{-zx}{x-2}.$$

En tenant compte des conditions initiales, la première équation donne

$$x = -2\cos t.$$

Formons la combinaison des aires qui donne

$$z\frac{d^2x}{dt^2} - (x-2)\frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

ou

$$z\frac{dx}{dt} - (x-2)\frac{dz}{dt} = 12,$$

en intégrant et tenant compte des conditions initiales. On a alors, en remplaçant x par $-2\cos t$, l'équation suivante pour déterminer z :

$$(1+\cos t)\frac{dz}{dt} + z\sin t = 6.$$

L'intégrale de cette équation linéaire privée de second membre est

$$z = A(1+\cos t).$$

Posons

$$z = u(1+\cos t);$$

on a, pour déterminer u, l'équation

$$\frac{du}{dt}(1+\cos t)^2 = 6,$$

d'où

$$u = \int \frac{6\,dt}{(1+\cos t)^2} + C,$$

$$u = 3 \operatorname{tang} \frac{t}{2} + \operatorname{tang}^3 \frac{t}{2} + C;$$

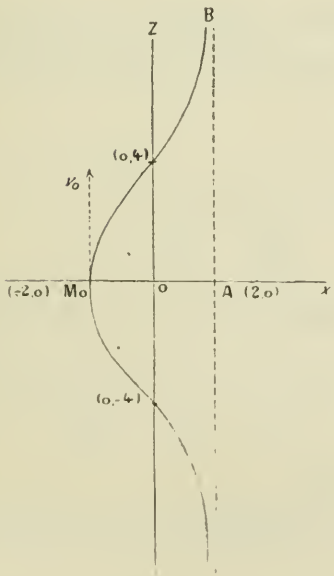
on en tire

$$z = \left[3 \operatorname{tang} \frac{t}{2} + \operatorname{tang}^3 \frac{t}{2} + C\right] 2 \cos^2 \frac{t}{2}.$$

En vertu des conditions initiales, $C = 0$ et, par suite,

$$z = 3 \sin t + 2 \sin^2 \frac{t}{2} \operatorname{tang} \frac{t}{2}.$$

Fig. 2.



Le mouvement est donc défini par les équations

$$x = -2 \cos t,$$

$$z = \sin t \left[3 + \operatorname{tang}^2 \frac{t}{2}\right].$$

La trajectoire est, en posant tang $\frac{t}{2} = \theta$, la cubique unicursale

$$x = a\frac{\theta^2 - 1}{\theta^2 + 1},$$

$$z = \frac{2\theta(\theta^2 + 3)}{\theta^2 + 1},$$

représentée par la figure 2. Le mobile part de M_0 et décrit la branche *infinie* M_0B en un temps *fini* $t = \pi$.

Composition d'Algèbre et Trigonométrie ;

SOLUTION PAR M. JEAN SERVAIS.

On donne l'équation différentielle

$$(1) \qquad a\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + by = 0,$$

où a et b désignent deux constantes réelles.

I. *Trouver une série entière* $\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots$ *qui vérifie l'équation* (1) *et s'assurer qu'elle est convergente.*

II. *Constater :*

1° *Que les coefficients* λ_0 *et* λ_1, *demeurent arbitraires ;*

2° *Que la série peut s'écrire*

$$\lambda_0\varphi(x, a, b) + \lambda_1\psi(x, a, b);$$

φ et ψ *désignant deux séries entières en* x *dont les coefficients sont des fonctions de* a *et* b ;

3° *Que ces fonctions satisfont à l'équation* (1);

4° *Que leurs dérivées* φ'_x et ψ'_x *satisfont chacune à une équation de même forme.*

III. *Exprimer* $\varphi'(x, a, b)$ *et* $\psi'(x, a, b)$ *en fonction de* $\varphi(x, a, b-1)$ *et* $\psi(x, a, b-1)$.

IV. *Quand* b *est entier positif, suivant qu'il est pair ou impair, la série* φ *ou* ψ *devient un polynome.*

V. *Discuter, d'après le signe de* a, *la réalité des racines de ces polynomes* φ *ou* ψ *suivant la parité de* b.

Soit

$$y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 + \ldots$$
$$+ \lambda_m x^m + \lambda_{m+1} x^{m+1} + \lambda_{m+2} x^{m+2} + \ldots,$$

on a

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_1 + 2\lambda_2 x + 3\lambda_3 x^2 + \ldots$$
$$+ m\lambda_m x^{m-1} + (m+1)\lambda_{m+1} x^m + (m+2)\lambda_{m+2} x^{m+1} + \ldots$$

et

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\lambda_2 + 2.3\lambda_3 x + \ldots + m(m-1)\lambda_m x^{m-2}$$
$$+ m(m+1)\lambda_{m+1} x^{m-1} + (m+1)(m+2)\lambda_{m+2} x^m + \ldots.$$

Formons l'expression

$$a\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + by$$

et écrivons qu'elle est identiquement nulle en égalant à zéro le terme constant, le coefficient de x, etc., celui de x^m.

Nous obtenons les égalités

$$b\lambda_0 + 2a\lambda_2 = 0,$$
$$(b-1)\lambda_1 + 2.3a\lambda_3 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$(b-m)\lambda_m + (m+1)(m+2)a\lambda_{m+2} = 0;$$

on en tire

$$\lambda_2 = -\frac{b}{2a}\lambda_0.$$

$$\lambda_4 = \frac{2-b}{3.4a}\lambda_2.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\lambda_{2p} = \frac{2p-2-b}{(2p-1)2pa}\lambda_{2p-2}.$$

Ce qui donne, en multipliant membres à membres,

$$(1) \qquad \lambda_{2p} = \frac{(-b)(2-b)(4-b)\ldots(2p-2-b)}{(2p)!\,a^p}\lambda_0.$$

De même on a

$$\lambda_3 = \frac{1-b}{2.3a}\lambda_1,$$

$$\lambda_5 = \frac{3-b}{4.5a}\lambda_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\lambda_{2p+1} = \frac{2p-1-b}{2p(2p+1)a}\lambda_{2p-1}.$$

D'où l'on déduit

$$(2) \qquad \lambda_{2p+1} = \frac{(1-b)(3-b)\ldots(2p-1-b)}{(2p+1)!\,a^p}\lambda_1.$$

Les formules (1) et (2) donnent ainsi les coefficients de la série y vérifiant *formellement* l'équation différentielle proposée, quels que soient λ_0 et λ_1.

La série peut se mettre sous la forme

$$\lambda_0\,\varphi(x, a, b) + \lambda_1\,\psi(x, a, b),$$

en posant

$$(3) \quad \varphi(x, a, b) = 1 + \frac{-b}{2!\,a}x^2 + \frac{(-b)(2-b)}{4!\,a^2}x^4 + \ldots$$
$$+ \frac{(-b)(2-b)\ldots(2p-2-b)}{(2p)!\,a^p}x^{2p} + \ldots$$

et

$$(4) \quad \psi(x, a, b) = x + \frac{1-b}{3!\,a}x^3 + \frac{(1-b)(3-b)}{5!\,a^2}x^5 + \ldots$$
$$+ \frac{(1-b)(3-b)\ldots(2p-1-b)}{(2p+1)!\,a^p}x^{2p+1} + \ldots.$$

Or ces deux séries sont toutes deux convergentes quels que soient a, b et x car, dans ces deux séries, les rapports d'un terme au précédent sont respectivement

$$\frac{2p-2-b}{(2p-1)2pa}x^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{2p-1-b}{2p(2p+1)a}x^2$$

qui tendent tous deux vers zéro quand p croît indéfiniment.

Chacune de ces séries partielles étant convergente la série totale l'est aussi et l'on peut poser

$$y = \lambda_0 \varphi(x, a, b) + \lambda_1 \psi(x, a, b),$$

φ et ψ étant deux fonctions définies par les égalités (3) et (4).

Il est clair que ces fonctions φ et ψ vérifient séparément l'équation proposée, car φ est la solution particulière obtenue en faisant $\lambda_0 = 1$ et $\lambda_1 = 0$, tandis que ψ est celle qu'on obtient pour $\lambda_0 = 0$ et $\lambda_1 = 1$.

φ et ψ étant représentées par des séries entières, leurs dérivées sont obtenues en dérivant ces séries termes à termes, on a donc

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{b}{a}x + \frac{(-b)(2-b)}{3!\,a^2}x^3 + \ldots$$
$$+ \frac{(-b)(2-b)\ldots(2p-2-b)}{(2p-1)!\,a^p}x^{2p-1} + \ldots$$

et

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 1 + \frac{1-b}{2!\,a}x^2 + \frac{(1-b)(3-b)}{4!\,a^2}x^4 + \ldots$$
$$+ \frac{(1-b)(3-b)\ldots(2p-1-b)}{(2p)!\,a^p}x^{2p} + \ldots.$$

On voit immédiatement qu'on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{b}{a}\psi(x, a, b-1)$$

et

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \varphi(x, a, b-1):$$

On en conclut que $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ sont des solutions particulières de l'équation déduite de la proposée en changeant b en $b-1$

$$a\frac{d^2 y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + (b-1)y = 0,$$

ce qu'on pourrait d'ailleurs vérifier directement.

Lorsque b est un nombre entier pair, $b = 2p$, tous les termes de la série (3) qui donne $\varphi(x, a, b)$ sont nuls à partir du terme en x^{2p+2}. Dans ce cas φ est un polynome de degré $2p$.

De même si b est un entier impair, $b = 2p+1$, le développement de $\psi(x, a, b)$ est limité et ψ est un polynome de degré $2p+1$.

On a

$$\varphi(x, a, 2p) = 1 + \frac{-2p}{2!\,a}x^2 + (-1)^2\frac{(2p-2)2p}{4!\,a^2}x^4 + \ldots$$
$$+ (-1)^p\frac{2p(2p-2)\ldots 4.2}{(2p)!\,a^p}x^{2p}$$

et

$$\psi(x, a, 2p+1) = x + (-1)\frac{2p}{3!\,a}x^3 + (-1)^2\frac{(2p-2)2p}{5!\,a^2}x^5 + \ldots$$
$$+ (-1)^p\frac{2p(2p-2)\ldots 4.2}{(2p+1)!\,a^p}x^{2p+1}.$$

On voit immédiatement que lorsque a est négatif tous les coefficients des polynomes $\varphi(x, a, 2p)$ et $\psi(x, a, 2p+1)$ sont positifs.

Par suite toutes les racines de l'équation

$$\varphi(x, a, 2p) = 0$$

sont imaginaires, et l'équation

$$\psi(x, a, 2p+1) = 0$$

n'a qu'une seule racine réelle : $x = 0$.

Examinons alors le cas où a est positif.

Comme on a

$$\varphi'(x, a, 2p) = -\frac{2p}{a}\psi(x, a, 2p-1)$$

et

$$\psi'(x, a, 2p+1) = \varphi(x, a, 2p),$$

si l'on considère la suite des équations entières

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{ll} \varphi(x, a, 2) & = 0, \\ \psi(x, a, 3) & = 0, \\ \varphi(x, a, 4) & = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & , \\ \varphi(x, a, 2p-2) & = 0, \\ \psi(x, a, 2p-1) & = 0, \\ \varphi(x, a, 2p) & = 0, \\ \psi(x, a, 2p+1) & = 0, \end{array}\right.$$

les racines réelles de chacune d'elles *séparent* les racines de la suivante, en vertu du théorème de Rolle. Or, d'après ce qui précède on a

$$\varphi''(x, a, 2p) = -\frac{2p}{a}\psi'(x, a, 2p-1) = -\frac{2p}{a}\varphi(x, a, 2p-2)$$

et

$$\psi''(x, a, 2p+1) = \varphi'(x, a, 2p) = -\frac{2p}{a}\psi(x, a, 2p-1),$$

comme d'ailleurs φ et ψ sont des intégrales de l'équation proposée

$$a\varphi'' - x\varphi' + 2p\varphi = 0,$$
$$a\psi'' - x\psi' + (2p+1)\psi = 0,$$

on en conclut qu'on a *identiquement*

$$\varphi(x, a, 2p) + \frac{x}{a}\psi(x, a, 2p-1) - \varphi(x, a, 2p-2) = 0$$

et

$$(2p+1)\psi(x, a, 2p+1)$$
$$- x\varphi(x, a, 2p) - 2p\psi(x, a, 2p-1) = 0.$$

Ces deux dernières identités prouvent que pour toute valeur de x qui annule $\psi(x, a, 2p-1)$ les deux polynomes $\varphi(x, a, 2p)$ et $\varphi(x, a, 2p-2)$ prennent la *même* valeur numérique, et que pour toute valeur de x qui annule $\varphi(x, a, 2p)$ les deux polynomes $\psi(x, a, 2p+1)$ et $\psi(x, a, 2p-1)$ prennent des valeurs numériques de même signe.

En d'autres termes *pour toute valeur de x qui annule l'un des polynomes de la suite* (S) *les deux polynomes qui le comprennent prennent des valeurs numériques de même signe.*

Il en résulte que, *lorsque $a > 0$, chacune des équations* (S) *a toutes ses racines réelles et distinctes.*

Il suffit de prouver que si cette proposition est vraie pour une des équations (S) elle est vraie pour la suivante.

Supposons que l'équation

$$\psi(x, a, 2p-1) = 0$$

ait toutes ses racines réelles et distinctes.

Soient α et β deux racines consécutives.

Entre ces deux racines il y a, d'après le théorème de Rolle, une racine et une seule de l'équation dérivée

$$\varphi(x, a, 2p-2) = 0;$$

on a donc

$$\varphi(\alpha, a, 2p-2)\varphi(\beta, a, 2p-2) < 0,$$

mais, comme d'après la remarque précédente

$$\varphi(\alpha, a, 2p-2) = \varphi(\alpha, a, 2p)$$

et

$$\varphi(\beta, b, 2p-2) = \varphi(\beta, b, 2p),$$

on en conclut aussi que

$$\varphi(\alpha, a, 2p)\varphi(\beta, a, 2p) < 0.$$

Par suite, entre deux racines consécutives quelconques α et β de l'équation

$$\psi(x, a, 2p-1) = 0,$$

il y aura au moins une racine réelle de l'équation suivante

$$\varphi(x, a, 2p) = 0.$$

Si donc la première a toutes ses racines réelles, il en est de même de la seconde. Or, les deux premières équations de la suite (S)

$$\varphi(x, a, 2) = 0,$$
$$\psi(x, a, 3) = 0$$

ont manifestement leurs racines réelles et distinctes quand $a > o$.

Il en est donc de même des suivantes.

On peut remarquer que les équations de la suite (S) ne dépendent que de $\frac{x}{\sqrt{a}}$. Si donc on pose

$$x = \sqrt{a}\,.\,z,$$

on obtiendra des équations en z à coefficients *numériques* et ayant d'ailleurs toutes leurs racines réelles. On en conclut que lorsque a est négatif les racines des équations (S) sont imaginaires pures, de la forme ik,

Composition de calcul numérique.

Application de la règle à calcul à la fonction $y = \frac{x}{\sin x}$, *où* x *représente le rapport de l'arc au rayon.*

1° *Dresser une table de la fonction en faisant croître* x *de* 0 *à* 100 *grades par échelons de* 10 *grades.*

2° *Fournir un moyen d'étendre l'usage de la table en dehors de ses limites et calculer la table auxiliaire nécessaire à cet effet.*

3° *Application : Calculer* y *pour un arc de* 542 *grades, au moyen des deux tables construites.*

CORRESPONDANCE.

M. E.-N. Barisien. — *Sur le triangle équilatéral minimum inscrit dans un triangle* ABC. — Voici une propriété de ce triangle, que je crois inédite :

On trouve pour la longueur α du côté de ce triangle équilatéral minimum :

$$\alpha = \frac{2S\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 4S\sqrt{3}}}.$$

Voici un moyen d'obtenir *graphiquement* la valeur de α.

Si A′ est le sommet du triangle équilatéral construit sur BC à l'extérieur du triangle ABC, on voit que

$$\overline{AA'}^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(60^\circ + B) = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4S\sqrt{3}}{2}.$$

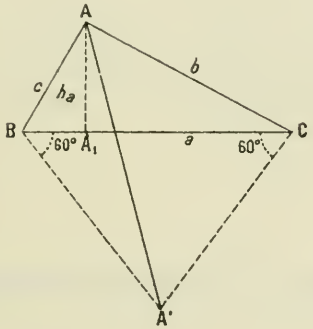
Il en résulte que

$$x = \frac{2S}{AA'}.$$

x est donc la hauteur d'un triangle de base AA′ et dont l'aire est S, aire de ABC. Or $2S = ah_a$. Donc

$$x = \frac{ah_a}{AA'}.$$

Par conséquent, *le côté x est une quatrième proportion-*



nelle au côté a, à la hauteur correspondante h_a et à la longueur AA′.

Ce qui permet de construire facilement x.

BIBLIOGRAPHIE.

R. de Montessus et *R. d'Adhémar*, docteurs ès sciences mathématiques. — Calcul numérique (*Opérations arithmétiques et algébriques, Intégration*). 1 volume grand in-18 jésus, cartonné toile, de 250 pages, avec figures dans le texte. (*Encyclopédie*

scientifique, O. Doin et fils, éditeurs, 8, place de l'Odéon, Paris.) Prix : 5 fr.

Cet Ouvrage est divisé en deux Parties :

La *première Partie* traite des opérations arithmétiques abrégées et surtout du calcul pratique des racines des équations tant algébriques que transcendantes. Tous les procédés de calcul des racines sont exposés et des applications numériques nombreuses illustrent les méthodes. Les principes du calcul des différences terminent cette partie.

Dans la *seconde Partie* on trouvera une théorie des *Intégrales* et des *Équations différentielles et aux dérivées partielles*, avec applications numériques, et des applications de la méthode des *approximations successives* aux *fonctions implicites* et aux *équations*.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2155.

(1901, p. 240.)

Il y a deux systèmes de coniques ayant leurs foyers sur une conique c et un contact double avec c; les coniques du premier système enveloppent outre c le cercle sur lequel se coupent les tangentes orthogonales de c; les coniques de l'autre système enveloppent outre c les deux directrices de c. (L. Klug.)

PREMIÈRE SOLUTION,

Par l'Auteur.

Il y a deux systèmes de coniques passant par les foyers d'une conique k et ayant un contact double avec k : les cordes de contact du premier système sont les diamètres de k

et aussi les diamètres des coniques de ce système; les cordes de contact de l'autre système sont parallèles à l'axe focal de k et aussi à l'axe focal des coniques de ce système. Donc : si une conique a un contact double avec la conique donnée c et ses foyers sur c, ces foyers sont les extrémités d'un diamètre ou d'une corde parallèle à l'axe focal de c.

Soient O le centre, AA_1 et BB_1 deux diamètres de la

Fig. 1.

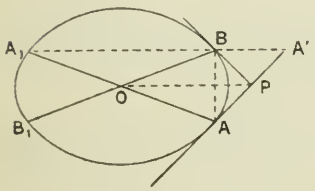
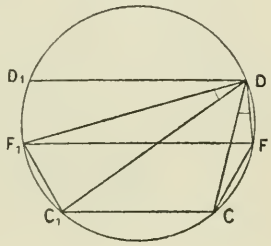


Fig. 2.



conique c avec la propriété que les tangentes aux points A, B se coupent orthogonalement au point P.

Si A′ est le point symétrique de A par rapport à la tangente BP, les trois points A_1, B, A′ sont en ligne droite et

$$A_1B \pm BA' = A_1A' = 2\,OP;$$

donc OP est égal au demi-grand axe d'une conique u, ayant ses foyers aux points A, A_1 et un contact double avec c aux points B, B_1.

Donc, si l'on fait varier le diamètre AA_1, les coniques u ou les coniques du *premier* système enveloppent outre c le cercle concentrique avec c et de rayon OP.

Nous décrivons un cercle par les foyers F, F_1 de la conique c qui coupe c aux couples de points C, C_1 et D, D_1 symétriques à l'axe non focal de c.

Parce que les angles F_1DC_1, CDF sont égaux : la conique v avec les foyers CC_1 et passant par le point D a un contact double avec c aux points D, D_1. Mais les deux quadrilatères inscriptibles $DFCF_1$ et DFC_1F_1 nous donnent

$$CD.FF_1 = DF.CF_1 + DF_1.CF,$$
$$C_1D.FF_1 = DF.C_1F_1 + DF_1.C_1F$$

ou

$$(CD + C_1D)FF_1 = DF(CF_1 + C_1F_1) + DF_1(CF + C_1F)$$

et, si $2a$ est l'axe focal de l'ellipse c, on a

$$2a = CF_1 + C_1F_1 = CF + C_1F = DF + DF_1$$

et

$$CD + C_1D = \frac{4a^2}{FF_1}.$$

Résultat analogue pour l'hyperbole c.

Donc, les deux directrices de la conique c sont les tangentes de la conique v aux extrémités de l'axe focal. Alors toutes les coniques v, ayant un contact double avec c et leurs foyers aux extrémités des cordes parallèles à l'axe non focal de c, enveloppent outre c les deux directrices de c.

Note. — Pour la parabole c, les deux systèmes des coniques u et v se confondent et leur enveloppe est la directrice de la parabole.

DEUXIÈME SOLUTION,

Par M. E.-N. Barisien.

Prenons comme conique C l'ellipse

$$(C) \qquad b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

On voit qu'il existe : 1° un système de coniques bitangentes à C et concentriques à C ; 2° un système de coniques bitangentes à C et ayant leur centre sur l'un des axes de C. (Pour que les foyers de ces dernières coniques soient sur C, il faut que leur centre soit sur l'axe non focal.)

Examinons donc ces deux systèmes.

I. *Coniques bitangentes et concentriques à* C. — L'équation générale d'une conique bitangente et concentrique à l'ellipse C est

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 + \lambda(y - mx)^2 = 0,$$

ou

$$(1) \qquad (b^2 + \lambda m^2)x^2 + (a^2 + \lambda)y^2 - 2m\lambda xy - a^2b^2 = 0.$$

On sait que, pour la conique générale

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

les équations qui donnent les foyers (α, β) sont

$$(2)\qquad (B^2 - AC)(\alpha^2 - \beta^2) - 2(CD - BE)\alpha + 2(AE - BD)\beta - D^2 + E^2 + (A - C)F = 0,$$

$$(3)\qquad (B^2 - AC)\alpha\beta - (AE - BD)\alpha - (CD - BE)\beta - DE + BF = 0.$$

Or, ici

$$A = b^2 + \lambda m^2, \qquad B = -m\lambda, \qquad C = a^2 + \lambda,$$
$$D = 0, \qquad E = 0, \qquad F = -a^2 b^2.$$

Les équations aux foyers deviennent donc

$$(4)\qquad [a^2 b^2 + \lambda(a^2 m^2 + b^2)](\alpha^2 - \beta^2) - [c^2 + \lambda(1 - m^2)]a^2 b^2 = 0,$$

$$(5)\qquad [a^2 b^2 + \lambda(a^2 m^2 + b^2)]\alpha\beta - m\lambda a^2 b^2 = 0.$$

Si les foyers sont sur C, on doit avoir, en outre,

$$(6)\qquad b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 - a^2 b^2 = 0.$$

Il faut éliminer α et β entre (4), (5) et (6).

De (4) et (6) on tire les valeurs de α^2 et β^2, qui, portées dans (5), donnent une équation en λ qui se réduit au premier degré, et l'on a

$$\lambda = -\frac{a^4 b^4}{(a^2 + b^2)(a^4 m^2 + b^4)}.$$

Cette valeur de λ, portée dans (1), conduit à l'équation ordonnée par rapport à m

$$(7)\qquad a^6 m^2[b^2 x^2 + (a^2 + b^2)(y^2 - b^2)] + 2ma^4 b^4 xy + b^6[a^2 y^2 + (a^2 + b^2)(x^2 - a^2)] = 0.$$

L'enveloppe est donc

$$[b^2 x^2 + (a^2 + b^2)(y^2 - b^2)] \times [a^2 y^2 + (a^2 + b^2)(x^2 - a^2)] - a^2 b^2 x^2 y^2 = 0$$

et s'écrit

$$(b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2)(x^2 + y^2 - a^2 - b^2) = 0.$$

On a donc bien pour enveloppe des coniques (1) l'ellipse C et son cercle de Monge

$$(8) \qquad x^2 + y^2 - a^2 - b^2 = 0.$$

Remarque. — Si l'on calcule les longueurs des axes de l'ellipse (7), on retrouve pour le demi-axe focal $\sqrt{a^2 b^2}$, car les sommets du grand axe sont situés sur le cercle (8). On trouve pour le demi-petit axe

$$ab\sqrt{\frac{a^4 m^2 + b^4}{a^6 m^2 + b^6}}.$$

Le lieu des sommets du petit axe est la quartique

$$(a^2 x^2 + b^2 y^2)(x^2 + y^2) = a^4 x^2 + b^4 y^2$$

qui a pour aire $\pi(a^2 + b^2 - ab)$, différence des aires de C et de son cercle de Monge.

II. *Coniques bitangentes à* C *et ayant leur centre sur le petit axe de* C. — L'équation générale de ces coniques est

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 - a^2 b^2 + \mu(y - k)^2 = 0,$$

ou

$$(9) \qquad b^2 x^2 + (a^2 + \mu) y^2 - 2k\mu y + \mu k^2 - a^2 b^2 = 0.$$

En faisant dans (2) et (3)

$$A = b^2, \qquad B = 0, \qquad C = a^2 + \mu,$$
$$D = 0, \qquad E = -k\mu, \qquad F = \mu k^2 - a^2 b^2,$$

on a les équations aux foyers

$$(10) \qquad b^2(a^2 + \mu)(\alpha^2 - \beta^2) + 2b^2 k\mu\beta$$
$$- k^2\mu^2 + (c^2 + \mu)(\mu k^2 - a^2 b^2) = 0,$$

$$(11) \qquad \alpha[(a^2 - \mu)\beta - k\mu] = 0,$$

auxquelles il faut adjoindre l'équation (6).

De (11) on tire

$$\beta = \frac{k\mu}{a^2 + \mu}.$$

En portant dans (6), on a

$$\alpha^2 = a^2 - \frac{a^2 k^2 \mu^2}{b^2 (a^2 + \mu)^2}.$$

Ces valeurs de α et β, portées dans (10), conduisent à

$$\mu = -\frac{a^2 b^4}{c^2 k^2 + b^4}.$$

Cette valeur de μ, portée dans (9), conduit à l'équation suivante, ordonnée par rapport au paramètre variable k,

$$k^2 [c^2 (b^2 x^2 + a^2 y^2) - a^4 b^2] + 2 a^2 b^4 k y + b^4 (x^2 - a^2) = 0.$$

De sorte que l'équation de l'enveloppe est

$$[c^2 (b^2 x^2 + a^2 y^2) - a^4 b^2] (x^2 - a^2) - a^4 b^2 y^2 = 0$$

ou

$$(b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2)(c^2 x^2 - a^4) = 0.$$

L'enveloppe comprend donc l'ellipse C et ses deux directrices $x = \pm \frac{a^2}{c}$.

Cas où la conique C *est une parabole.* — Dans ce cas, les deux systèmes n'en forment plus qu'un seul, et l'enveloppe comprend la parabole et sa directrice. De sorte qu'on a la propriété suivante :

Les paraboles qui sont bitangentes à une parabole P *et ont leur foyer sur* P, *sont tangentes aussi à la directrice de* P.

Généralisation de la question. — I. Si au lieu du cercle de Monge de l'ellipse C, on considère un cercle quelconque concentrique S,

$$(S) \qquad x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

on trouve les propriétés suivantes :

Si l'on considère les coniques Σ *qui sont bitangentes à la fois à l'ellipse* C *et à son cercle orthoptique* S :

1° *Le lieu des foyers de* Σ *est l'ellipse* U

$$(U) \qquad \frac{x^2}{R^2 - b^2} + \frac{y^2}{R^2 - a^2} = 1.$$

(Si $R^2 = a^2 + b^2$, c'est-à-dire si S est le cercle orthoptique de C, l'ellipse U devient bien C.)

2° *Le lieu des sommets du petit axe de* Σ *est la quartique*

$$(x^2+y^2)[(R^2-b^2)x^2+(R^2-a^2)y^2]$$
$$= a^2(R^2-b^2)x^2+b^2(R^2-a^2)y^2,$$

d'où l'aire est

$$\sigma = \pi R^2 - \pi\sqrt{(R^2-a^2)(R^2-b^2)},$$

c'est-à-dire la différence des aires de S et de U.

3° *Les directrices de* Σ *enveloppent l'ellipse* V

$$\text{(V)} \qquad x^2(R^2-b^2)+y^2(R^2-a^2) = R^3,$$

qui, dans le cas de la question proposée, est

$$a^2x^2+b^2y^2 = (a^2+b^2)^2.$$

II. Si, au lieu des deux directrices de l'ellipse C, on considère deux droites D et D′ perpendiculaires au grand axe, $x = \pm d$, on a la propriété suivante :

Si l'on considère les coniques qui sont bitangentes à la fois à l'ellipse C *et aux droites* D, D′, *le lieu de leurs foyers est la conique*

$$\frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{d^2-a^2} = \frac{a^2}{c^2}.$$

Pour $d = \dfrac{a^2}{c}$, on retrouve l'ellipse C.

ERRATA.

1911, page 188, ligne 2 en remontant, *au lieu de* une fonction donnée, *lire* une fonction linéaire.

1911, page 190, après l'énoncé de l'exercice 2150, *ajouter* (1910, p. 144).

1911, page 205, ligne 2, *au lieu de* Π, *lire* π.

[B4b]

SEMI-INVARIANTS D'UN POLYNOME;

PAR M. G. FONTENÉ.

1. On appelle *semi-invariants d'un polygone* X les fonctions entières des coefficients qui ne sont pas altérées par la substitution $y = x + h$, ou encore qui dépendent seulement des différences des racines, de la forme de la figure formée par les points-racines. Pour un polynome de degré m, le nombre des semi-invariants distincts est m, en comptant comme semi-invariant le coefficient de x^m.

On peut former comme il suit un système complet de semi-invariants. Soit

$$X_m = ax^m + \frac{m}{1} bx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} cx^{m-2} + \ldots;$$

les quotients des dérivées par m, $m(m-1)$, ... sont

$$\begin{aligned}
X_{m-1} &= ax^{m-1} + \frac{(m-1)}{1} bx^{m-2} \\
&\quad + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} cx^{m-3} + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
X_2 &= ax^2 + 2bx + c, \\
X_1 &= ax + b, \\
X_0 &= a.
\end{aligned}$$

Si l'on pose

$$U = ax + b,$$

d'où

$$x = \frac{-b}{a} + \frac{U}{a},$$

le polynome X_m se transforme en un polynome en U donné par la formule de Taylor, savoir

$$X_m\left(\frac{-b}{a}\right)+\frac{m}{1}\frac{U}{a}X_{m-1}\left(\frac{-b}{a}\right)+\ldots$$
$$+\frac{m(m-1\ldots3)}{1.2\ldots(m-2)}\frac{U^{m-2}}{a^{m-2}}X_2\left(\frac{-b}{a}\right)+\frac{U^m}{a^m}\times a,$$

sans terme en U^{m-1}; on a donc, en multipliant par a^{m-1},

$$a^{m-1}X_m=U^m+\frac{m(m-1)}{1.2}\gamma U^{m-2}$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\delta U^{m-3}+\ldots,$$

γ, δ, ... étant les expressions qu'on obtient en remplaçant x par $\frac{-b}{a}$ dans les polynomes

$$ax^2+2bx+c,$$
$$ax^3+3bx^2+3cx+d,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et en multipliant les résultats par a, a^2, ...; on a ainsi

$$\gamma=(b^2-2b^2)+a.c,$$
$$\delta=(-b^3+3b^3)-3ab.c+a^2.d,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ou, en mettant a en tête de la suite,

$$a,$$
$$\gamma=a.c-b^2,$$
$$\delta=a^2.d-3ab.c+2b^3,$$
$$\varepsilon=a^3.e-4a^2b.d+6ab^2.c-3b^4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Or $\frac{U}{a}$ est l'excès de x sur la moyenne arithmétique $\frac{-b}{a}$ des racines du polynome X; quand on fait la sub-

stitution $y = x + h$, la moyenne arithmétique des racines du polynome en y est $\frac{-b}{a} + h$, et l'excès de y ou $x + h$ sur cette moyenne est encore $\frac{U}{a}$. *Il suit de là que* $\alpha, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots$ *forment un système de semi-invariants, qui sont d'ailleurs distincts et en nombre* m.

2. Tout invariant relatif à une valeur de m s'exprime en fonction des semi-invariants correspondants, et devient un semi-invariant pour les valeurs plus élevées de m. On a, pour $m = 4$, les invariants

$$S = ae - 4bd + 3c^2,$$
$$T = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3;$$

si on les prend sur le polynome en U, qui n'a pas de terme en U^3, on a

$$a^2 S = \varepsilon + 3\gamma^2,$$
$$a^3 T = \gamma\varepsilon - \delta^2 - \gamma^3;$$

pour la première formule, par exemple, comme on a remplacé x par $\frac{U - b}{a}$, S a été divisé par a^4, mais on a multiplié ensuite chaque coefficient par a^3, de sorte que S a été multiplié par a^2. On pourra donc, à partir de $m = 4$, employer un système de semi-invariants comprenant

$$\alpha, \quad \gamma, \quad \delta, \quad (S, T);$$

bien entendu, ces cinq quantités sont liées par une relation qu'on obtient en éliminant ε entre les deux formules ci-dessus : cette relation est

$$a^2(\gamma S - aT) = 4\gamma^3 + \delta^2.$$

Pour $m = 4$, le polynome en U peut s'écrire

$$U^4 + 6\gamma U^2 + 4\delta U + (a^2 S - 3\gamma^2).$$

3. Je me propose d'appliquer les semi-invariants à la discussion des équations de degré 2, 3, 4, 5 au point de vue des racines multiples, et d'utiliser la transformation $U = ax + b$ pour la réduction de l'intégrale $\int \frac{1}{X^2} dx$, X étant un polynome du quatrième degré.

[A3c]

DISCUSSION DES ÉQUATIONS DE DEGRÉS 2, 3, 4, 5 AU POINT DE VUE DES RACINES MULTIPLES;

PAR M. G. FONTENÉ.

PREMIÈRE PARTIE.

1. *Semi-invariants.* — Les seules fonctions des coefficients qui figurent dans la discussion d'une équation algébrique entière $X = 0$, au point de vue des racines multiples, sont les semi-invariants (*voir* la Note précédente). On doit supposer qu'on a fait choix d'un système de semi-invariants fondamentaux.

2. *Constantes de Sturm.* — Parmi les expressions qu'on peut construire avec les semi-invariants fondamentaux, les suivantes jouent un rôle important dans la question des racines multiples; elles ne suffisent d'ailleurs pas à la résoudre.

Considérons une équation de degré m, dont les racines sont $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; nous désignons par $D_{m,p}$ la somme des produits des carrés des différences *des racines prises p à p*; on aura par exemple

$$D_{m,3} = \Sigma(\alpha - \beta)^2 (\alpha - \gamma)^2 (\beta - \gamma)^2.$$

Les quantités D sont en nombre $m-1$, depuis $D_{m,2}$ ou $\Sigma(\alpha-\beta)^2$, jusqu'à $D_{m,m}$ qui est le produit des carrés des différences des racines. L'équation aux carrés des différences des racines donnerait à considérer $\frac{m(m-1)}{2}$ quantités, moins intéressantes d'ailleurs que les quantités D.

Le produit $D_{m,m}$ est à un facteur numérique près, positif ou négatif, le quotient du discriminant par $a^{2(m-1)}$, a étant le coefficient de x^m; on trouvera plus loin une règle pour le signe de ce facteur.

D'une manière générale, à des facteurs près qui sont ici sans importance, les quantités D sont les constantes de Sturm, c'est-à-dire les coefficients des termes de degré le plus élevé dans les polynomes de Sturm.

3. *Usage de ces constantes.* — Voici la part de ces constantes dans la discussion.

a. Si l'on a

$$D_{m,m} \neq 0, \tag{1}$$

l'équation n'a pas de racine multiple.

b. Si l'on suppose $D_{m,m}=0$, l'équation a une racine double, soit $\alpha \equiv \beta$; on a alors, pour former $D_{m,m-1}$, les m quantités

$$\beta, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta, \quad \ldots,$$

et $D_{m,m-1}$ se réduit à

$$2 \times \Pi(\beta-\gamma)^2(\beta-\delta)^2 \ldots.$$

Si l'on suppose

$$D_{m,m}=0, \qquad D_{m,m-1} \neq 0, \tag{2}$$

l'équation a simplement une racine double.

c. Si l'on suppose $D_{m,m-0}$, $D_{m,m-1=0}$, deux des $m-1$ quantités $\beta, \gamma, \ldots$ sont égales, soit qu'on ait $\gamma = \delta$, auquel cas l'équation a deux racines doubles, soit qu'on ait $\beta = \gamma$, auquel cas l'équation a une racine triple. Dans les deux cas, on a, pour former $D_{m,m-2}$, m quantités où l'on peut trouver seulement $m-2$ quantités distinctes, et $D_{m,m-2}$ se réduit à un produit unique affecté d'un coefficient numérique. Si l'on suppose

$$(3) \qquad D_{m,m} = 0, \qquad D_{m,m-1} = 0, \qquad D_{m,m-2} \neq 0,$$

l'équation a simplement deux racines doubles ou une racine triple.

On peut continuer ainsi, jusqu'au cas où, tous les D étant nuls, l'équation a une racine dont l'ordre de multiplicité est m.

4. *Insuffisance de ces constantes.* — Il restera à distinguer le cas de deux racines doubles du cas d'une racine triple, ...; on devra pour cela faire intervenir autrement les semi-invariants.

5. *Équation du deuxième degré.* — Soit le polynome

$$ax^2 + 2bx + c;$$

outre a, qui est un semi-invariant sans intérêt, il existe un invariant qui est le discriminant $ac - b^2$ ou γ :

$$D_{2,2} = \frac{-2^2}{a^2}\gamma;$$

il y a une racine double si γ est nul.

6. *Équation du troisième degré.* — Soit le polynome

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d;$$

les semi-invariants fondamentaux sont

$$a, \qquad \gamma = ac - b^2, \qquad \delta = a^2 d - 3abc + 2b^3;$$

le discriminant se construit avec ces semi-invariants.

On a

$$D_{3,3} = \frac{-3^3}{a^4}(a^2 d^2 + 4ac^3 - 6abcd + 4b^3 d - 3b^2 c^2)$$
$$= \frac{-3^3}{a^6}(\delta^2 + 4\gamma^3)$$

et

$$D_{3,2} = \frac{-2 \times 3^2}{a^2}\gamma;$$

la seconde expression du discriminant s'obtient directement sur le polynome $U^3 + 3\gamma U + \delta$, qui résulte de la transformation $U = ax + b$ (Note précédente).

On a alors ce Tableau :

$4\gamma^3 + \delta^2 \neq 0$	pas de racine multiple,
$\left.\begin{array}{r} 4\gamma^3 + \delta^2 = 0 \\ \gamma \neq 0 \end{array}\right\}$	une racine double,
$\left.\begin{array}{r} 4\gamma^3 + \delta^2 = 0 \\ \gamma = 0 \end{array}\right\}$	une racine triple.

7. *Équation du quatrième degré.* — Soit le polynome

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e;$$

on utilise les semi-invariants

$$a, \qquad \gamma = ac - b^2, \qquad \delta = a^2 d - 3abc + 2b^3,$$

et les invariants

$$S = ae - 4bd + 3c^2,$$
$$T = ace + 2bcd - ad^2 - eb^3 - c^3;$$

ces cinq quantités sont liées (Note précédente) par la

relation

$$a^2(\gamma S - aT) = 4\gamma^3 + \delta^2.$$

On a

$$D_{4,4} = \frac{4^4}{a^6}(S^3 - 27T^2),$$

$$D_{4,3} = \frac{-3 \times 4^3}{a^4}(2\gamma S - 3aT),$$

$$D_{4,2} = \frac{-3 \times 4^2}{a^2}\gamma.$$

Mais ces quantités ne suffisent pas à la discussion : δ et S vont intervenir autrement. Les conditions

$$S^3 - 27T^2 = 0, \qquad 2\gamma S - 3aT = 0, \qquad \gamma \neq 0,$$

relatives au cas de deux racines doubles ou d'une racine triple, donnent

$$S^2(a^2 S - 12\gamma^2) = 0;$$

on peut donc avoir

$$S = 0,$$

ou bien

$$S = \frac{12\gamma^2}{a^2}, \qquad T = \frac{8\gamma^3}{a^3}, \qquad a^2(\gamma S - aT) = 4\gamma^3,$$

d'où

$$\delta = 0,$$

d'après la relation écrite plus haut. Or, d'une manière générale, la condition $\delta = 0$ exprime (pour une équation du 4e degré) que la somme de deux des racines est égale à la somme des deux autres. L'hypothèse $\delta = 0$ correspond donc ici au cas de deux racines doubles et ne convient pas au cas d'une racine triple; pour une racine triple on a, dès lors,

$$S = 0,$$

et la réciproque est exacte, car on ne peut avoir

$$S = 0, \qquad \text{d'où} \qquad T = 0,$$

avec

$$\delta = 0,$$

puisque cela donnerait

$$\gamma = 0.$$

On a ce Tableau :

$S^3 - 27T^2 \neq 0$	pas de racine multiple,
$\left.\begin{array}{r} S^3 - 27T^2 = 0 \\ 2\gamma S - 3aT \neq 0 \end{array}\right\}$	une racine double,
$\left.\begin{array}{r} S^3 - 27T^2 = 0 \\ 2\gamma S - 3aT = 0 \\ \gamma \neq 0 \end{array}\right\}$	deux racines doubles ou une racine triple, selon que δ ou S est égal à zéro,
$\left.\begin{array}{r} S^3 - 27T^2 = 0 \\ 2\gamma S - 3aT = 0 \\ \gamma = 0 \end{array}\right\}$	une racine quadruple.

Il est facile de montrer qu'il y a deux racines doubles pour

$$2\gamma S - 3aT = 0, \qquad \delta = 0, \qquad \gamma \neq 0;$$

la condition $\delta = 0$ donne en effet, d'après la relation qui a déjà servi dans le calcul inverse,

$$a^2(\gamma S - aT) = 4\gamma^3 \qquad \text{ou} \qquad a^2\gamma S = 12\gamma^3,$$

ou, avec $\gamma \neq 0$,

$$S = \frac{12\gamma^2}{a^2}, \qquad T = \frac{8\gamma^3}{a^3}, \qquad S^3 - 27T^2 = 0.$$

On remarquera que, avec $S^3 - 27T^2 = 0$, on peut avoir

$$\delta = 0,$$

sans qu'il y ait deux racines doubles; les racines peuvent être α, α, $\alpha + h$, $\alpha - h$, aussi bien que α, α, β, β, pour que la somme de deux des racines soit égale à la

somme des deux autres Il faut garder la condition

$$2\gamma S - 3aT = 0.$$

8. *Équation du cinquième degré.* — Soit le polynome

$$ax^5 + 5bx^4 + 10cx^3 + 10dx^2 + 5ex + f;$$

on aura à utiliser les semi-invariants

$$\begin{aligned}
&a,\\
&\gamma = ac - b^2,\\
&S = ae - 4bd + 3c^2,\\
&T = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3,\\
&\Sigma = 3a^2df - 2a^2e^2 - 9abcf + abde\\
&\quad + 18ac^2e - 12acd^2 + 6b^3f - 15b^2ce + 10b^2d^2,
\end{aligned}$$

l'invariant

$$\begin{aligned}
J = {} & a^2f^2 - 10abef + 4acdf + 16ace^2 - 12ad^2e\\
& + 16b^2df + 9b^2e^2 - 12bc^2f - 76bcde + 48bd^3\\
& + 48c^3e - 32c^2d^2,
\end{aligned}$$

et enfin le discriminant. La fonction Σ a moins de termes que la fonction $\Sigma - S^2$, indiquée également par Salmon; je la désigne par Σ parce que, si l'on fait

$$a = 0, \qquad 5b = a', \qquad 10c = 4b', \qquad \ldots, \qquad f = e',$$

elle se réduit (sauf un facteur numérique) à $a'^2 S'$.

Les constantes de Sturm ont été calculées par M. Roberts (*Quarterly Journal*, t. IV, p. 175). Voici leurs valeurs, à des facteurs près qu'on peut négliger ici

$$\begin{aligned}
&D_{5,5} && \text{ou le discriminant,}\quad a^4f^4 + \ldots,\\
&D_{5,4} && \gamma J - 4S\Sigma + 8(S^3 - 27T^2),\\
&D_{5,3} && 5\gamma S - 9aT,\\
&D_{5,2} && \gamma.
\end{aligned}$$

Si l'équation a deux racines doubles, exactement, on

peut étudier J, *qui est un invariant*, en supposant que ces racines sont zéro et ∞ ; on a ainsi

$$J = -32c^2d^2 \neq 0.$$

Si l'équation a une racine triple, en la supposant nulle ou infinie, on a $J = 0$. (Salmon fait observer que, si une équation de degré m a une racine multiple d'ordre p, avec $2p > m$, tous les invariants sont nuls; c'est ainsi que, pour l'équation du quatrième degré, on avait

$$S = 0, \qquad T = 0,$$

dans le cas d'une racine triple).

Si $D_{5,5}$ et $D_{5,4}$ sont nuls, il y a au moins une racine triple; en supposant que cette racine soit zéro, ce qui est permis au point de vue des semi-invariants, on a

$$S = 3c^2;$$

selon qu'il y a une racine triple et une racine double, ou une racine quadruple, on a

$$S \neq 0 \qquad \text{ou} \qquad S = 0.$$

On a ce Tableau :

$D_{5,5} \neq 0$	pas de racine multiple,
$D_{5,5} = 0$, $D_{5,4} \neq 0$	une racine double,
$D_{5,5} = 0$, $D_{5,4} = 0$, $D_{5,3} \neq 0$	deux racines doubles ou une racine triple, selon qu'on a $J \neq 0$ ou $J = 0$,
$D_{5,5} = 0$, $D_{5,4} = 0$, $D_{5,3} = 0$, $D_{5,2} \neq 0$	une racine double et une racine triple, ou une racine quadruple, selon qu'on a $S \neq 0$ ou $S = 0$;

si tous les D sont nuls, on a une racine quintuple.

La fonction

$$\Pi(\alpha + \beta - \gamma - \delta),$$

avec 15 facteurs, s'annule dans le cas de deux racines doubles et ne s'annule pas dans le cas d'une racine triple; c'est un semi-invariant de poids égal à 15, d'ordre égal à 12, contenant par exemple un terme en $a^9 f^3$. Pour le calculer, on chercherait la condition qui exprime que la somme de deux racines est égale à la somme des deux autres; la racine restante étant celle de l'équation

$$ax - m = 0,$$

on exprimerait que, dans l'équation

$$X : (ax - m) = 0,$$

la somme de deux racines est égale à la somme des autres, ce qui donne

$$m^3 + 3bm^2 + (8ac - 5b^2)m + 16a^2d - 40abc + 25b^3 = 0;$$

on éliminerait m entre cette relation et la relation

$$X\left(\frac{m}{a}\right) = 0.$$

On aurait à écarter la solution parasite $a = o$, à laquelle correspond la valeur

$$m = -5b.$$

9. *Remarque sur le signe du discriminant.* — Bien que ce signe soit ici sans importance, je rappelle le fait suivant qui mériterait d'être plus connu.

Appelons discriminant, et désignons par Δ, le quotient par a du résultant des équations $X = 0$, $X' = 0$, résultant dont le signe ne dépend pas de l'ordre dans lequel on prend les différences des racines des deux

équations. Ce résultat est, pour une équation du quatrième degré :

$$\begin{vmatrix} a & 4b & 6c & 4d & e & 0 & 0 \\ 0 & a & 4b & 6c & 4d & e & 0 \\ 0 & 0 & a & 4b & 6c & 4d & e \\ a & 3b & 3c & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 3b & 3c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 3b & 3c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 3b & 3c & 3d \end{vmatrix},$$

ou

$$\begin{vmatrix} a & 4b & 6c & 4d & e & 0 & 0 \\ 0 & a & 4b & 6c & 4d & e & 0 \\ 0 & 0 & a & 4b & 6c & 4d & e \\ 0 & -b & -3c & -3d & -e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & -3c & -3d & -e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b & -3c & -3d & -e \\ 0 & 0 & 0 & a & 3b & 3c & 3d \end{vmatrix},$$

et l'on en prend le quotient par a. Ce quotient contient un terme en $a^3 e^3$, provenant de

$$a^2 \times \begin{vmatrix} 0 & -e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e \\ a & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

et ce terme est $a^3 e^3$. D'une manière générale, on aura le terme $a^m g^m$, que m soit pair ou impair.

Le discriminant ainsi défini,

$$\begin{array}{lcl} ac - b^2, & & \\ a^3 d^2 + \ldots & \text{ou} & \dfrac{\delta^2 + 4\gamma^3}{a^2}, \\ a^2 e^3 + \ldots & \text{ou} & S^3 - 27\,T^2, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

est de signe contraire au produit des carrés des

différences des racines pour un polynome de degré $4k+2$ *ou* $4k+3$, *tandis qu'il a le même signe que ce produit pour un polynome du degré* $4k$ *ou* $4k+1$. (Salmon, *Algèbre supérieure*, p. 345; *voir* ci-dessus les expressions des quantités $D_{2,2}$, $D_{3,3}$ d'une part, $D_{4,4}$ d'autre part.)

Si, partant d'une équation du quatrième degré, on passe à une équation du troisième degré en faisant

$$a=0, \qquad 4b=a' \qquad 6c=3b', \qquad 4d=3c', \qquad e=d'.$$

on a

$$S=-\frac{3}{4}\gamma', \qquad T=-\frac{1}{16}\delta',$$

$$S^3-27T^2=\frac{-3^3}{4^3}(4\gamma'^3+\delta'^2)=\frac{-3^3}{4^3}a'^2(a'^2d'^2+\ldots),$$

avec un signe —. Il en sera de même chaque fois que l'on passera d'une équation de degré pair à l'équation de degré immédiatement inférieur.

DEUXIÈME PARTIE.

10. Je vais reprendre d'une manière différente l'étude de l'équation du quatrième degré

$$X\equiv ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e=0;$$

on obtiendra ici les expressions des racines multiples.

Le polynome dérivé du polynome X est $4X_1$, en posant

$$X_1=ax^3+3bx^2+3cx+d.$$

On a

$$(1) \qquad aX=X_1(ax+b)+R,$$

en posant

$$R=3(ac-b^2)x^2+3(ad-bc)x+ae-bd.$$

On a ensuite

$$(2)\quad 3(ac-b^2)^2X_1 = R\times[a(ac-b^2)x+3b(ac-b^2) - a(ad-bc)]+aY,$$

en posant

$$Y=[2(ac-b^2)S-3aT]x+[(ad-bc)S-3bT].$$

Il faut alors distinguer deux cas; et c'est là un défaut de la méthode, les deux cas n'étant pas distincts dans le cas où l'équation a simplement une racine double.

I. — $ac-b^2\neq 0$.

11. Pour que le polynome X ait une racine double et une seule, il faut et il suffit que le polynome Y ait une racine et que cette racine annule le polynome R. Nous admettrons que le discriminant de X est S^3-27T^2, et nous écrirons les conditions

$$S^3-27T^2=0,$$
$$27S-3aT\neq 0.$$

12. Si l'on veut que le polynome X ait deux racines doubles ou une racine triple, il faut et il suffit que les polynomes X et X_1 aient un plus grand commun diviseur R du second degré, non carré ou carré parfait. Dans les deux cas le polynome Y doit être identiquement nul, ce qui donne les conditions

$$S^3-27T^2=0,$$
$$27S-3aT=0.$$

On en conclut comme précédemment

$$\delta\times S=0.$$

On peut d'ailleurs observer qu'on a

$$aY=(27S-3aT)(ax+b)+\delta S.$$

Or le discriminant du polynome R, qui est bien du second degré avec l'hypothèse $\gamma \neq 0$, est

$$\gamma S + 3aT \quad \text{ou} \quad 3\gamma S,$$

eu égard à la condition

$$2\gamma S - 3aT = 0.$$

On a donc le résultat suivant :

$$\text{d'où} \quad \left.\begin{array}{r} S^3 - 27T^2 = 0 \\ 2\gamma S - 3aT = 0 \\ \delta \times S = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{ll} \delta = 0, & \text{deux racines double,} \\ S = 0, & \text{une racine triple :} \end{array}$$

il n'y a pas lieu d'accompagner la condition $\delta = 0$, de l'inégalité $S \neq 0$, car si l'on avait

$$\delta = 0, \quad S = 0, \quad \text{d'où} \quad T = 0,$$

on aurait

$$\gamma = 0,$$

d'après une relation du n° 5.

II. — $ac - b^2 = 0$.

13. On a alors

$$R = 3(ad - bc)x + (ae - bd),$$

et, d'après l'égalité (2), le polynome Y est le produit du polynome R par $ad - bc$; on a

$$3(ad - bc)^2 = 2\gamma S - 3aT.$$

Il n'y a, par suite, rien de changé pour le cas d'une racine double; l'inégalité

$$ad - bc \neq 0$$

ne diffère pas de l'inégalité

$$2\gamma S - 3aT \neq 0.$$

Si l'on suppose

$$ad - bc = 0,$$

il ne peut y avoir de racine multiple que si le polynome R est identiquement nul, c'est-à-dire si l'on a

$$ae - bd = 0;$$

le polynome X est alors divisible par sa dérivée, il a une racine quadruple. La condition $ad - bc = 0$ équivaut à $27S - 3aT = 0$, qui se réduit d'ailleurs à $T = 0$; comme on a

$$aS = a(ae - bd) - 3b(ad - bc),$$

la condition $ae - bd = 0$ équivaut à $S = 0$, par suite à

$$S^3 - 27T^2 = 0.$$

14. En rapprochant les résultats obtenus, on retrouve le Tableau du n° 7.

15. Remarque I. — Lorsque le polynome X a une racine double unique, c'est la racine de l'équation $Y = 0$. Or, le hessien du polynome X est

$$H = (ac - b^2)x^4 + 2(ad - bc)x^3 + \ldots;$$

considérons le covariant bien connu

$$2S.H - 3T.X,$$

ou

$$[2(ac - b^2)S - 3aT]x^4 + 4[(ad - bc)S - 3bT]x^3 + \ldots;$$

sa dérivée troisième, divisée par 24, est précisément le polynome Y. La racine double du polynome X est donc la racine du polynome

$$(2S.H - 3T.X)''' = 0.$$

C'est qu'en effet le covariant ci-dessus est

$$\frac{-a^4}{192}\Sigma(\beta-\gamma)^2(\beta-\delta)^2(\gamma-\delta)^2(x-\alpha)^4;$$

quand le polynome X a une racine double α, ce covariant se réduit à

$$\frac{-a^4}{192}\times 2(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2(\gamma-\delta)^2(x-\alpha)^4.$$

16. Remarque II. — Salmon observe que, dans le cas de deux racines doubles, le polynome X et son hessien ne diffèrent que par un facteur constant; on a donc pour ce cas

$$\frac{ac-b^2}{a}=\frac{ad-bc}{2b}=\frac{ae+2bd-3c^2}{6c}=\frac{bc-cd}{2d}$$
$$=\frac{ce-d^2}{e}=\frac{3\mathrm{T}}{2\mathrm{S}};$$

le covariant $2\mathrm{S}.\mathrm{H}-3\mathrm{T}.\mathrm{X}$ est alors identiquement nul.

Les conditions

$$2(ac-b^2)\mathrm{S}-3a\mathrm{T}=0,$$
$$(ad-bc)\mathrm{S}-3b\mathrm{T}=0$$

expriment directement que le polynome Y est identiquement nul; l'égalité

$$\frac{ac-b^2}{a}=\frac{ad-bc}{2b}$$

n'est pas autre chose que $\delta=0$. L'équation en $\frac{1}{x}$ déduite de l'équation $\mathrm{X}=0$ rend compte des égalités

$$2(ce-d^2)\mathrm{S}-3e\mathrm{T}=0,$$
$$(be-ed)\mathrm{S}-3d\mathrm{T}=0.$$

Dans le cas d'une racine triple α, le hessien est à un

facteur constant près $(x-\alpha)^4$. On a alors

$$S = 0, \qquad T = 0,$$

et le covariant $2\,S.H - 3\,T.X$ est encore identiquement nul.

Si l'on se reporte à l'expression de ce covariant donnée plus haut pour le cas d'une racine double, on voit encore qu'il est identiquement nul pour $\gamma = \delta$ (deux racines doubles) et pour $\alpha = \gamma$ (une racine triple).

17. Remarque III. — On aurait pu employer la transformation $U = ax + b$, qui substitue au polynome X le polynome

$$U^4 + 6\gamma U^2 + 4\delta U + (a^2 S - 3\gamma^2);$$

d'une part on aurait eu

$$aY = (2\gamma S - 3aT)U + \delta S;$$

d'autre part on aurait eu

$$a^2 R = 3\gamma U^2 + 3\delta U + (a^2 S - 3\gamma^2),$$

dont le discriminant prend facilement la forme $\gamma S + 3aT$.

[R6a]

APPLICATION DU THÉORÈME DE M. APPELL SUR LE MOMENT DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT PAR RAPPORT A UN COMPLEXE D'UN MOBILE SOUMIS A UNE FORCE APPARTENANT A CE COMPLEXE. — GÉNÉRALISATION DE L'ÉQUATION DE CLAIRAUT;

Par M. Ch. PLATRIER,
Ancien Élève de l'École Polytechnique.

Dans son *Cours de Mécanique rationnelle* (t. I, p. 311), M. Appell généralise ainsi l'application à un

mobile soumis à une force : 1° constamment perpendiculaire à un axe; 2° située constamment dans un même plan avec un axe, des théorèmes de la quantité de mouvement et du moment de la quantité de mouvement : *Si la résultante des forces agissant sur un mobile appartient à un complexe linéaire, le moment de la quantité de mouvement par rapport à ce complexe est constant.*

Autrement dit, si la force XYZ, appliquée au mobile (x, y, z) de masse 1, satisfait constamment à l'équation

$$\begin{aligned} &pX + qY + rZ + a(yZ - zY) \\ &\quad + b(zX - xZ) + c(xY - yX) = 0, \end{aligned}$$

où p, q, r, a, b, c sont des constantes, nous dirons qu'elle appartient au complexe (p, q, r, a, b, c) et nous aurons la relation :

$$\begin{aligned} &p\frac{dx}{dt} + q\frac{dy}{dt} + r\frac{dz}{dt} + a\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) \\ &\quad + b\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) + c\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \text{const.} \end{aligned}$$

Nous nous proposons d'appliquer ce théorème au mouvement d'un mobile astreint à se déplacer sur un hélicoïde quelconque d'axe Oz et de pas $h = 2\pi k$, ce mobile n'étant soumis qu'à la réaction normale de la surface.

Nous remarquerons tout d'abord que les normales à tous les hélicoïdes d'axe Oz et de pas h forment un complexe linéaire; en effet, les normales en question qui passent par un point $M(x, y, z)$ sont toutes situées dans le plan mené par M perpendiculairement à la tangente en M à l'hélice de pas h et d'axe Oz. Les paramètres directeurs de cette tangente sont

$$-y, \quad x, \quad k.$$

Appelons a, b, c les paramètres directeurs d'une droite du complexe passant par M. Le complexe considéré est défini par la relation

$$-ya + xb + kc = 0.$$

Nous en déduirons immédiatement que le mobile dont nous étudions le mouvement est soumis à la réaction normale de l'hélicoïde N (XYZ) appartenant au complexe $(0, 0, k, 0, 0, 1)$.

Appliquons alors le théorème de M. Appell en appelant ρ la distance du mobile à Oz; v, sa vitesse; ω, l'angle de sa trajectoire en M avec l'hélice de pas h et d'axe Oz passant par M; φ, l'angle de la tangente en M à cette hélice avec un plan horizontal.

Décomposons la quantité de mouvement suivant deux directions rectangulaires : MT tangente à l'hélice et MN; le moment par rapport au complexe de la composante suivant MN (droite du complexe) est nul.

Et le théorème de M. Appell donne, par suite, en tout point de la trajectoire,

$$(1) \qquad kv \cos\omega \sin\varphi + \rho v \cos\omega \cos\varphi = \text{const.}$$

Or l'angle φ est tel que $\operatorname{tang}\varphi = \frac{k}{\rho}$, et l'on sait qu'un mobile astreint à l'unique condition de se déplacer sur une surface décrit avec une vitesse constante une ligne géodésique de la surface.

L'équation (1) peut donc s'écrire, en remplaçant φ par sa valeur,

$$(2) \qquad \sqrt{\rho^2 + k^2} \cos\omega = \text{const.}$$

Elle définit les lignes géodésiques des hélicoïdes et constitue une généralisation de l'équation de Clairaut :

$$(3) \qquad \rho \cos\omega = \text{const.}$$

qui définit les lignes géodésiques des surfaces de révolution (hélicoïdes de pas nul, c'est-à-dire tels que $k = 0$).

Au point de vue de la théorie des surfaces l'équation (2) peut d'ailleurs être considérée comme une conséquence de l'équation de Clairaut et du théorème de Bour sur l'application des hélicoïdes sur les surfaces de révolution.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1911).

SUJETS DES COMPOSITIONS.

Mathématiques élémentaires.

I. *Si l'on mène à une ellipse* (C) *de centre* C *deux cercles bitangents, l'un* (A) *ayant son centre* A *sur l'axe focal, l'autre* (B) *ayant son centre* B *sur l'axe non focal, le point d'intersection* I *des cordes de contact* MM′ *et* NN′ *est un point limite pour le système des deux cercles.* (*On demande aux candidats une démonstration indépendante de la théorie des pôles et polaires dans les coniques; s'ils emploient l'équation de la droite* AB, *rapportée aux axes de l'ellipse, pour montrer d'abord que le point* I *est sur cette droite, ils établiront géométriquement les formules qui expriment* $\overline{CA}$ *et* $\overline{CB}$ *au moyen des coordonnées* $\overline{CP}$ *et* $\overline{CQ}$ *du point* I. *Ils pourront donner* subsidiairement *une démonstration fondée sur la théorie des pôles et polaires dans les coniques.*)

II. *On donne deux cercles* (A) *et* (B), *de centres* A *et* B, *dont l'un* (A) *est intérieur à l'autre; soit* I *celui des deux points limites du faisceau* (A, B) *qui est intérieur aux*

deux cercles. (Ce choix du point I *a pour but d'écarter une discussion que les candidats n'auraient pas le temps de faire convenablement.)*

Si l'on mène par I *deux cordes rectangulaires* MM′ *et* NN′ *appartenant respectivement aux deux cercles, il existe une ellipse* (C) *doublement tangente aux deux cercles, les cordes de contact étant* MM′ *et* NN′; *le démontrer. Les cordes variant, les pôles* R *et* S *de ces cordes sont sur une droite fixe* Δ *perpendiculaire à la droite* AB *en un point* J; *les circonférences qui ont pour diamètres les segments* RS *sont orthogonales à la circonférence de diamètre* AB *qui est le lieu des centres des ellipses* (C); *les carrés* a^2 *et* b^2 *des demi-axes des ellipses* (C) *sont, les uns et les autres, proportionnels aux distances* CD *des centres* C *à la droite* Δ : *les ellipses* (C) *sont, par suite, semblables entre elles.*

III. *Les données restant les mêmes, les tangentes en* M *et* M′ *sont rencontrées par les tangentes en* N *et* N′ *aux points* E, F, G, H. *Désignant par* λ *l'angle que fait* IM *avec le prolongement de* BA, *on établira les* six *relations qui déterminent en fonction des constantes de la figure* (r, R, $\frac{IA}{r} = A$, $\frac{IB}{R} = B$) *et du paramètre* λ *les éléments essentiels du quadrilatère* IMEN, *à savoir les angles* IME = α, INE = β, *les côtés* IM *et* IN, *les côtés* EM *et* EN; *les deux dernières de ces relations sont*

$$EM \sin\alpha + EN \cos\beta = \frac{R \sin(\beta - \lambda)}{\cos\lambda},$$

$$EM \cos\alpha + EN \sin\beta = \frac{-r \cos(\lambda + \alpha)}{\sin\lambda}.$$

Vérifier au moyen de ces relations l'égalité $\frac{EM}{EN} = \frac{B}{A}$, *et en déduire que le quadrilatère* EFGH *reste inscrit à un cercle fixe* (O) *du faisceau* (A, B) *lorsque les cordes* MM′ *et* NN′ *varient. On déterminera la position du centre* O *de ce cercle en fonction des longueurs* IA, IB, JA, JB, JI, *en calculant successivement* $\frac{OA}{OB}$, OA, OB; *on calculera aussi la distance* JO, *on interprétera géométriquement la formule obtenue, et l'on en déduira une conséquence pour les circonférences décrites sur les segments* RS *comme diamètres.*

Comparant deux expressions différentes de la valeur du rapport $\frac{\text{ME}}{\text{MH}}$ *en fonction des quantités* IE, IH, $\widehat{\text{MIE}} = \gamma$, $\widehat{\text{MIH}} = \delta$, *on obtiendra* $\gamma = \delta$, *et l'on interprétera ce résultat en considérant les diagonales* EG *et* FH. *De quelle nature est la correspondance entre les droites* EG *et* FH?

SOLUTION PAR UN ANONYME.

I. *a. Par le calcul.* — En considérant l'ellipse comme projection du cercle, sans invoquer de propriété focale, on a (*fig.* 1)

$$\overline{\overline{\text{PM}}}^2 = \overline{\text{AP}} \,.\, \overline{\text{PR}}, \qquad \overline{\text{P}m}^2 = \overline{\text{CP}} \,.\, \overline{\text{PR}},$$

d'où

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{\overline{\text{AP}}}{\overline{\text{CP}}}$$

et, par suite,

$$(\alpha) \qquad \frac{\overline{\text{CP}}}{a^2} = \frac{\overline{\text{AP}}}{b^2} = \frac{\overline{\text{CA}}}{c^2}\left(= \frac{1}{\overline{\text{CR}}}\right),$$

puisque $\overline{\text{CP}} \,.\, \overline{\text{CR}} = a^2$; en projetant l'ellipse suivant un cercle, on a de même, si l'on considère le point N,

$$(\beta) \qquad \frac{\overline{\text{CQ}}}{b^2} = \frac{\overline{\text{BQ}}}{a^2} = \frac{\overline{\text{CB}}}{-c^2}\left(= \frac{1}{\overline{\text{CS}}}\right);$$

les relations (α) et (β) sont d'ailleurs équivalentes, car les unes ou les autres, appliquées au point M, donnent sur la normale en M

$$(\gamma) \qquad \frac{\overline{\text{B}'\text{M}}}{a^2} = \frac{\overline{\text{AM}}}{b^2} = \frac{\overline{\text{B}'\text{A}}}{c^2}.$$

On peut dire encore, en considérant l'ellipse comme projection du cercle et en invoquant en même temps la propriété focale de la tangente,

$$\overline{\text{CA}} \,.\, \overline{\text{CR}} = c^2, \qquad \overline{\text{CP}} \,.\, \overline{\text{CR}} = a^2,$$

ce qui donne les relations (α), en introduisant dès le début le segment $\overline{\text{CR}}$ utilisé à la fin de la seconde partie; on a ensuite,

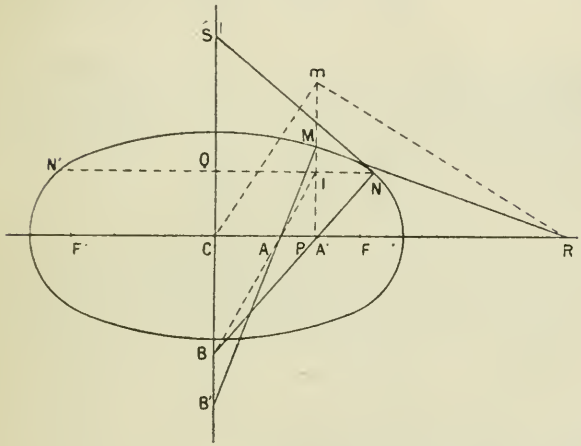
le cercle FNF′ passant en B et par suite en S,

$$\overline{CB}\,.\,\overline{CS} = -c^2, \qquad \overline{CQ}\,.\,\overline{CS} = b^2,$$

ce qui donne les relations (β).

Sans considérer l'ellipse comme projection du cercle, on

Fig. 1.



peut dire aussi : on a d'abord, en appelant ρ et ρ′ les rayons vecteurs du point M,

$$\frac{AF}{\rho} = \frac{AF'}{\rho'} = \frac{c}{a} = \frac{2\overline{CA}}{\rho' - \rho} = \frac{\overline{CA}}{\frac{c}{a}\overline{CP}},$$

d'où

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CP}};$$

on écrit alors les relations (α), en tenant compte de la propriété focale $\overline{CA}.\,\overline{CR} = c^2$; on en déduit les relations (γ); celles-ci donnent les relations (β) pour la normale en M, et on les applique au point N en tenant compte de la propriété focale $\overline{CB}\,.\,\overline{CS} = -c^2$.

Ou bien, le cercle NFF′ ayant BS comme diamètre, la

similitude des triangles BA'F et BFN donne

$$\frac{BA'}{BF} = \frac{BF}{BN} = \frac{A'F}{FN} = \frac{c}{a},$$

d'où

$$\frac{BA'}{BN} = \frac{c^2}{a^2},$$

$$(\gamma) \qquad \frac{\overline{BA'}}{c^2} = \frac{\overline{BN}}{a^2} = \frac{A'N}{b^2},$$

sur la normale en N. On en déduit (α) et (β), en introduisant les points R et S.

Si l'on considère maintenant sur AB le point I défini par les relations

$$\frac{\overline{IB}}{a^2} = \frac{\overline{IA}}{b^2} = \frac{\overline{AB}}{c^2},$$

on voit que les cordes MM' et NN' passent par ce point.

On pourrait dire encore : la corde NN' étant fixe, le point M variant, CA et CP sont proportionnels, donc CA et QI sont proportionnels, donc la droite IA rencontre l'axe non focal en un point fixe, et ce point fixe est le point B, comme on le voit en mettant le point M en N. L'idée est, en somme, que la forme de la division M, A, B' ne dépend que de l'ellipse, comme le montrent les relations (γ).

La méthode à laquelle l'énoncé fait allusion consiste à vérifier la relation

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{CA}} + \frac{\overline{CQ}}{\overline{CB}} = 1,$$

ce qui est immédiat.

Montrons que I est un point limite. Des relations

$$\overline{CA} \,.\, \overline{CR} = c^2, \qquad \overline{CB} \,.\, \overline{CS} = -c^2,$$

on déduit

$$\overline{CB} \,.\, \overline{CS} = -\overline{CA} \,.\, \overline{CR};$$

le quadrangle (A, R, B, S) est donc orthogonal, la droite RS est perpendiculaire sur AB, et cette droite est alors la polaire du point I par rapport à chacun des cercles (A) et (B).

[On aurait pu établir la relation $\overline{CB}.\ \overline{CS} = -c^2$ pour le point M, soit $\overline{CB'}.\ \overline{CS'} = -c^2$, en observant que le quadrangle

(A, R, B′, S′) est orthogonal, et en écrivant

$$\overline{CB'}.\overline{CS'} = -\overline{CA}.\overline{CR} = -c^2;$$

on se rend mieux compte ainsi de la relation

$$\overline{CB}.\overline{CS} = -\overline{CA}.\overline{CR},$$

dont on fait usage ici.]

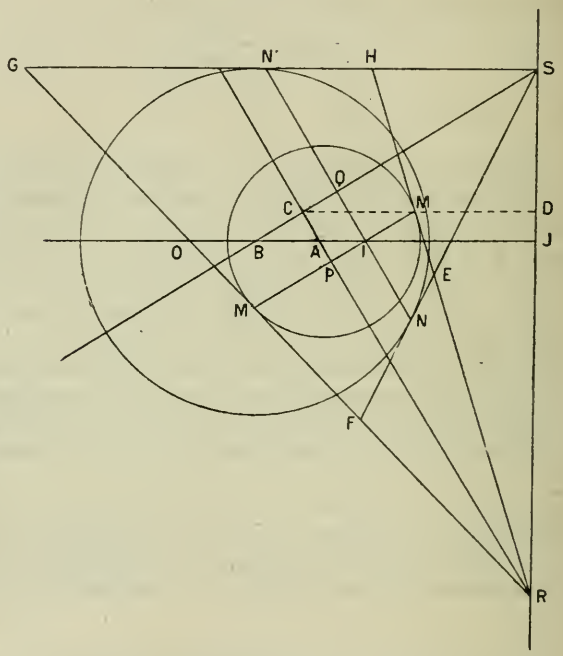
I. *b. Solution géométrique.* — Considérons la polaire du point I par rapport à l'ellipse. Elle passe par le point R, et aussi par le point R_1 qui est le conjugué du point I par rapport à M et M′ : elle est donc la polaire de I pour le cercle (A); elle est de même la polaire de I pour le cercle (B); le point I a donc même polaire RS par rapport aux deux cercles, c'est un point limite. [On sait d'ailleurs que, si une conique (C) est doublement tangente à deux coniques (A) et (B), les cordes de contact passent par l'un des sommets du triangle autopolaire commun relatif à ces deux coniques, leurs pôles étant sur le côté opposé ; c'est cela qu'on démontre ici.]

Remarque. — Le point I est intérieur au rectangle circonscrit à l'ellipse parallèlement aux axes; il peut être intérieur ou extérieur à l'ellipse, intérieur ou extérieur aux deux cercles.

II. Les cercles (A) et (B) étant donnés, ainsi que le point limite I et les cordes rectangulaires MM′, NN′, menons par A et B des perpendiculaires à ces cordes qui se coupent en un point C; il existe une ellipse de centre C qui a ses axes dirigés suivant CR et CS, qui passe en M (par suite en M′), et qui est tangente en M (par suite en M′) au cercle (A) : en effet, nous pouvons tracer un cercle de centre C tel que les points de contact des tangentes menées de R à ce cercle soient sur MM′, et l'ellipse qui admet ce cercle comme cercle principal et qui passe en M répond aux conditions énoncées. Je dis que cette ellipse est tangente en N et en N′ au cercle (B). Il existe, en effet, un cercle de centre (B) doublement tangent à l'ellipse; la corde de contact passe au point I, elle est portée par NN′; l'un des points limites du cercle considéré

et du cercle (A) étant le point I, ce cercle est le cercle (B). (On aurait pu considérer l'ellipse de centre C, tangente en N

Fig. 2.



et N' au cercle (B) ; les foyers de cette ellipse sont donnés par le cercle de diamètre BS.]

Les points R et S sont sur la droite Δ qui est la polaire commune du point I par rapport aux cercles (A) et (B).

Le quadrangle (A, B, R, S) étant orthogonal, la circonférence de diamètre RS est orthogonale à celle de diamètre AB. Voici une démonstration simple de ce fait : l'ensemble formé par la première circonférence et le triangle inscrit SCR, et l'ensemble formé par la seconde circonférence et le triangle inscrit ACB peuvent être rendus homothétiques par rapport au point C au moyen d'une rotation d'un angle droit autour de C ; les tangentes en C sont donc orthogonales. Les circonférences qui ont pour diamètres les segments RS, ayant leurs

centres en ligne droite et étant orthogonales à un cercle fixe, forment un faisceau ; elles coupent la droite AB en deux points fixes L et L′ définis par la relation $\overline{JL}^2 = JA . JB$.

Nous reviendrons sur ces circonférences.

On a trouvé, dans la première partie,

$$\frac{\overline{IB}}{a^2} = \frac{\overline{IA}}{b^2} = \frac{\overline{AB}}{c^2};$$

les ellipses (C) sont donc semblables ; l'idée est que la forme de la division I, A, B détermine la forme de la division M, A, B′, et, par suite, les rapports des quantités a^2, b^2, c^2. Comme on avait d'ailleurs

$$\frac{\overline{CP}}{a^2} = \frac{\overline{AP}}{b^2} = \frac{\overline{CA}}{c^2} = \frac{1}{\overline{CR}},$$

on a

$$\frac{\overline{BI}}{a^2} = \frac{\overline{AI}}{b^2} = \frac{\overline{BA}}{c^2} = \frac{1}{\overline{CD}},$$

puisque les segments de la division C, A, P sont aux segments de la division B, A, I comme $\overline{CD}$ est à $\overline{CR}$; a^2, b^2, c^2 sont donc proportionnels à $\overline{CD}$ lorsque MM′ et NN′ varient. On pourrait introduire dans cette démonstration les points U et V où la droite CD rencontre MM′ et NN′ ; on a par antiparallèles

$$a^2 = \overline{CP} . \overline{CR} = \overline{CU} . \overline{CD} = \overline{BI} . \overline{CD},$$
$$b^2 = \overline{CQ} . \overline{CS} = \overline{CV} . \overline{CD} = \overline{AI} . \overline{CD}.$$

Signalons encore les relations

$$c^2 = \overline{CA} . \overline{CR} = -\overline{CB} . \overline{CS} = \overline{BA} . \overline{CD}.$$

III. *a*. Considérons le contour quadrangulaire IMEN. Les triangles AIM et BIN donnant

$$\frac{\sin(90 - \alpha)}{AI} = \frac{\sin\lambda}{r} = \frac{\sin[\lambda - (90 - \alpha)]}{IM},$$

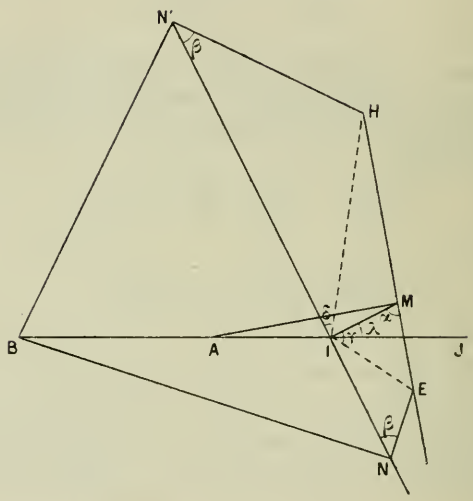
$$\frac{\sin(90 - \beta)}{BI} = \frac{\sin(90 - \lambda)}{R} = \frac{\sin[90 - \lambda - (90 - \beta)]}{IN};$$

on a donc

$$(1) \qquad \cos\alpha = A\sin\lambda \qquad \left(A = \frac{AI}{r}\right),$$

$$(2) \qquad \cos\beta = B\cos\lambda \qquad \left(B = \frac{BI}{R}\right)$$

Fig. 3.



et

$$IM = \frac{-r\cos(\alpha+\lambda)}{\sin\lambda},$$

$$IN = \frac{R\sin(\beta-\lambda)}{\cos\lambda},$$

ou encore, d'après (1) et (2),

$$(3) \qquad IM = r(\sin\alpha - A\cos\lambda),$$

$$(4) \qquad IN = R(\sin\beta - B\sin\lambda);$$

on a d'ailleurs directement ces dernières formules en écrivant

$$IM = PM - PI = r\sin\alpha - AI\cos\lambda = r(\sin\alpha - A\cos\lambda), \qquad \ldots,$$

c'est-à-dire en appliquant aux triangles AIM et BIN une des relations classiques obtenues par projection.

Par projection sur IM et sur IN on a enfin

$$\mathrm{EN}\sin\beta + \mathrm{EM}\cos\alpha = \mathrm{IM},$$
$$\mathrm{EM}\sin\alpha + \mathrm{EN}\cos\beta = \mathrm{IN},$$

ou, d'après (1), (2), (3) et (4),

$$(5)\qquad \mathrm{EN}\sin\beta + \mathrm{A}.\mathrm{EM}\sin\lambda = r(\sin\alpha - \mathrm{A}\cos\lambda),$$
$$(6)\qquad \mathrm{EM}\sin\alpha + \mathrm{B}.\mathrm{EN}\cos\lambda = \mathrm{R}(\sin\beta - \mathrm{B}\sin\lambda).$$

Si l'on divise membre à membre, on voit que, pour établir la relation $\frac{\mathrm{EM}}{\mathrm{EN}} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$, il faut vérifier qu'on a

$$\frac{\mathrm{A}(\sin\beta + \mathrm{B}\sin\lambda)}{\mathrm{B}(\sin\alpha + \mathrm{A}\cos\lambda)} = \frac{r(\sin\alpha - \mathrm{A}\cos\lambda)}{\mathrm{R}(\sin\beta - \mathrm{B}\sin\lambda)},$$

ou

$$\frac{\mathrm{A}.\mathrm{R}}{\mathrm{B}.r} = \frac{\sin^2\alpha - \mathrm{A}^2\cos^2\lambda}{\sin^2\beta - \mathrm{B}^2\sin^2\lambda};$$

en tenant compte à nouveau de (1) et (2), cette relation devient

$$\frac{\mathrm{A}.\mathrm{R}}{\mathrm{B}.r} = \frac{1 - \mathrm{A}^2}{1 - \mathrm{B}^2},$$

ou

$$\mathrm{A}.\mathrm{R}(1 - \mathrm{B}^2) = \mathrm{B}.r(1 - \mathrm{A}^2),$$

ou, en divisant par AB,

$$\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{B}} - \mathrm{B}.\mathrm{R} = \frac{r}{\mathrm{A}} - \mathrm{A}.r.$$

Or, *a priori*, les quatre quantités R, r, A, B, relatives à un système de deux cercles, sont liées par une relation qui exprime que I est point limite ; on doit avoir, J étant le conjugué de I par rapport aux deux cercles,

$$\overline{\mathrm{BJ}} - \overline{\mathrm{BI}} = \overline{\mathrm{AJ}} - \overline{\mathrm{AI}},$$

ou

$$\frac{\mathrm{R}^2}{\overline{\mathrm{BI}}} - \overline{\mathrm{BI}} = \frac{r^2}{\overline{\mathrm{AI}}} - \overline{\mathrm{AI}},$$

ou

$$(7)\qquad \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{B}} - \mathrm{B}.\mathrm{R} = \frac{r}{\mathrm{A}} - \mathrm{A}r;$$

c'est bien ce qu'il fallait établir.

[En considérant l'ellipse comme projection d'un cercle, on a

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{\mathrm{IM}.\mathrm{IM}'}{im.im'} = \frac{\mathrm{IM}.\mathrm{IM}'}{\mathrm{IN}.\mathrm{IN}'} = \frac{r^2 - \overline{\mathrm{IA}}^2}{\mathrm{R}^2 - \overline{\mathrm{IB}}^2};$$

comme on a trouvé $\frac{b^2}{a^2} = \frac{\overline{\mathrm{IA}}}{\overline{\mathrm{IB}}}$, on doit avoir

$$\frac{\overline{\mathrm{IA}}}{\overline{\mathrm{IB}}} = \frac{r^2 - \overline{\mathrm{IA}}^2}{\mathrm{R}^2 - \mathrm{IB}^2},$$

ou

$$\frac{\mathrm{A} : \mathrm{R}}{\mathrm{B} : r} = \frac{1 - \mathrm{A}^2}{1 - \mathrm{B}^2};$$

c'est la relation (δ) sous la forme qu'on a d'abord rencontrée ci-dessus.]

Si l'on veut arriver à la relation $\frac{\mathrm{EM}}{\mathrm{EN}} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$, et non pas se contenter de la vérifier, le mieux est de calculer directement EM et EN sur la figure, en projetant le contour IMEN sur une perpendiculaire à EN et sur une perpendiculaire à EM; on a d'abord

$$\begin{aligned}\mathrm{EM}\sin\mathrm{E} &= \mathrm{IN}\sin\beta - \mathrm{IM}\cos\beta \\ &= \mathrm{R}\sin\beta(\sin\beta - \mathrm{B}\sin\lambda) - \mathrm{B}.r(\sin\alpha - \mathrm{A}\cos\lambda)\cos\lambda \\ &= -\mathrm{B}(\mathrm{R}\sin\beta\sin\lambda + r\sin\alpha\cos\lambda) \\ &\quad + (\mathrm{R}\sin^2\beta + \mathrm{A}.\mathrm{B}.r\cos^2\lambda),\end{aligned}$$

et le second terme devient

$$\mathrm{R} - \mathrm{RB}^2\cos^2\lambda + \mathrm{A}.\mathrm{B}.r\cos^2\lambda,$$

ou

$$\mathrm{B}\left[\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{B}} + (\mathrm{A}.r - \mathrm{B}.\mathrm{R})\cos^2\lambda\right];$$

on a de même, en permutant A et B, R et r, α et β, λ et $\frac{\pi}{2} - \lambda$,

$$\begin{aligned}\mathrm{EN}\sin\mathrm{E} = &-\mathrm{A}(r\sin\alpha\cos\lambda + \mathrm{R}\sin\beta\sin\lambda \\ &+ \mathrm{A}\left[\frac{r}{\mathrm{A}} + (\mathrm{B}.\mathrm{R} - \mathrm{A}.r)\sin^2\lambda\right];\end{aligned}$$

dans ces expressions de EM et de EN, les premières paren-

thèses sont identiques ; les secondes parenthèses sont égales, c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{R}{B} + (A.r - B.R)\cos^2\lambda = \frac{r}{A} + (B.R - A.r)\sin^2\lambda,$$

car cela donne

$$\frac{R}{B} - \frac{r}{A} = B.R - A.r,$$

et c'est la relation (δ); on en conclut $\frac{EM}{EN} = \frac{B}{A}$.

Ainsi l'on a $\frac{EM}{EN} = \frac{B}{A}$, c'est-à-dire que le rapport des puissances du point E, par rapport aux cercles (A) et (B), est $\frac{B^2}{A^2}$; la même chose ayant lieu pour les points F, G, H, il résulte d'un théorème connu que le quadrilatère EFGH reste inscrit à un cercle fixe (O) du faisceau (A, B), lorsque les cordes MM' et NN' varient. Le fait que ce quadrilatère est inscriptible à un cercle se vérifie d'ailleurs aisément.

Comme on a

$$\frac{\overline{EA}^2 - r^2}{\overline{EB}^2 - R^2} = \frac{B^2}{A^2} \qquad \text{ou} \qquad A^2.\overline{EA}^2 - B^2.\overline{EB}^2 = A^2 r^2 - B^2 R^2,$$

le centre O de ce cercle est déterminé par la relation

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{B^2}{A^2} \qquad (A < B);$$

à cause de

$$A^2 = \frac{\overline{IA}^2}{r^2} = \frac{\overline{IA}^2}{IA.JA} = \frac{\overline{IA}}{\overline{JA}}, \qquad B^2 = \frac{\overline{IB}}{\overline{JB}},$$

on a donc

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{IB}}{\overline{JB}} : \frac{\overline{IA}}{\overline{JA}},$$

de sorte que $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$ est égal au rapport anharmonique (I, J, B, A), et l'on en déduit, en appliquant la relation d'Euler pour quatre points en ligne droite,

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{IB}.\overline{JA}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{IA}.\overline{JB}} = \frac{\overline{AB}}{-\overline{JI}.\overline{AB}} = \frac{-1}{\overline{JI}};$$

on a encore

$$\overline{JO} = \overline{JA} + \overline{AO} = \overline{JA} + \frac{\overline{IB}\,.\,\overline{JA}}{\overline{JI}} = \frac{\overline{JA}\,.\,\overline{JB}}{\overline{JI}}$$

ou

$$\overline{JO}\,.\,\overline{JI} = \overline{JA}\,.\,\overline{JB};$$

or, si l'on appelle X et Y les points d'intersection de la droite JO avec le cercle (O), on a

$$\frac{2}{\overline{JI}} = \frac{1}{\overline{JX}} + \frac{1}{\overline{JY}} = \frac{2\overline{JO}}{\overline{JX}\,.\,\overline{JY}} \qquad \text{ou} \qquad \overline{JO}\,.\,\overline{JI} = \overline{JX}\,.\,\overline{JY},$$

de sorte que le produit $\overline{JO}.\overline{JI}$ représente la puissance du point J par rapport au cercle (O); cette puissance est donc égale à $\overline{JA}.\overline{JB}$, d'où il suit que l'axe radical du cercle (O) et du cercle de diamètre AB passe en J; dès lors, les circonférences décrites sur les segments RS comme diamètres sont orthogonales au cercle (O), puisqu'elles le sont au cercle de diamètre AB; on a

$$\overline{JR}\,.\,\overline{JS} = -\overline{JA}\,.\,\overline{JB} = -\overline{JO}\,.\,\overline{JI} = -\overline{JX}\,.\,\overline{JY},$$

et les quadrangles (X, Y, R, S) sont orthogonaux, comme les quadrangles (A, B, R, S).

Les triangles IRS sont conjugués par rapport au cercle (O); ils ont leur orthocentre en O, et à cela correspond la relation $\overline{JR}.\overline{JS} = -\overline{JO}.\overline{JI}$.

Le fait que le lieu des points dont le rapport des puissances par rapport à deux cercles (A) et (B) est constant se trouve être un cercle du faisceau (A, B), fait évident si les cercles se coupent, se trouve établi d'une manière générale si l'on part de ce théorème : la différence des puissances d'un point par rapport à deux cercles est égale au double produit de la distance des centres par la distance du point à l'axe radical de deux cercles. Si l'on veut vérifier ici le fait en question pour le cercle (O), qui est un cercle particulier du faisceau, on peut vérifier la relation

$$\overline{OE}^2 = \overline{OI} \times \overline{OJ}.$$

La formule de Stewart

$$\overline{EA}^2.\overline{OB} - \overline{EB}^2.\overline{OA} = \overline{EO}^2.\overline{AB} - \overline{OA}\,.\,\overline{OB}\,.\,\overline{AB},$$

avec

$$\frac{\overline{OB}}{A^2} = \frac{\overline{OA}}{B^2} = \frac{\overline{AB}}{A^2 - B^2},$$

donne

$$A^2.\overline{EA}^2 - B^2.\overline{EB}^2 = (A^2 - B^2)\overline{EO}^2 - \frac{A^2.B^2.\overline{AB}^2}{A^2 - B^2};$$

on a donc

$$A^2 r^2 - B^2 R^2 + \frac{A^2.B^2.\overline{AB}^2}{A^2 - B^2} = (A^2 - B^2)OE^2;$$

or, si l'on se reporte à l'établissement de la formule (δ), on a (le sens positif étant de B vers A)

$$\overline{AB} = \overline{AI} - \overline{BI} = Ar - BR,$$

$$\overline{AB} = \overline{AJ} - \overline{BJ} = \frac{r}{A} - \frac{R}{B} = \frac{Br - AR}{A.B};$$

on peut donc écrire

$$\overline{AB}(Ar + BR) + \overline{AB}\frac{A.B(Br - AR)}{A^2 - B^2} = (A^2 - B^2)\overline{OE}^2,$$

ou

$$\frac{\overline{AB}(A^3 r - B^3 R)}{(A^2 - B^2)^2} = \overline{OE}.$$

Or on a, d'une part,

$$\overline{OI} = \overline{OA} + \overline{AI} = \frac{\overline{AB}.B^2}{A^2 - B^2} + Ar$$

$$= \frac{(Ar - BR)B^2}{A^2 - B^2} + Ar = \frac{A^3 r - B^3 R}{A^2 - B^2};$$

on a, d'autre part,

$$\overline{OJ} = \overline{OA} + \overline{AJ} = \frac{\overline{AB}.B^2}{A^2 - B^2} + \frac{r}{A},$$

et, en évaluant cette fois $\overline{AB}$ par rapport à l'origine J,

$$\overline{OJ} = \frac{\frac{(Br - AR)B}{A}}{A^2 - B^2} + \frac{r}{A} = \frac{A(Ar - BR)}{A(A^2 - B^2)} = \frac{\overline{AB}}{A^2 - B^2};$$

on a donc bien

$$\overline{OE}^2 = \overline{OI} \times \overline{OJ}.$$

On peut remarquer les formules

$$\overline{OJ} = \frac{\overline{OB}}{A^2} = \frac{\overline{OA}}{B^2}.$$

III. *b*. En ce qui concerne les angles γ et δ, on a, d'une part,

$$\frac{ME}{\sin\gamma} = \frac{IE}{\sin\alpha}, \qquad \frac{MH}{\sin\delta} = \frac{IH}{\sin\alpha},$$

d'où

$$\frac{ME}{MH} = \frac{IE\sin\gamma}{IH\sin\delta},$$

relation évidente d'ailleurs; on a, d'autre part,

$$\frac{ME}{EN} = \frac{B}{A} = \frac{MH}{HN'},$$

d'où

$$\frac{ME}{MH} = \frac{EN}{HN'} = \frac{\dfrac{IE\cos\gamma}{\sin\beta}}{\dfrac{IH\cos\delta}{\sin\beta}} = \frac{IE\cos\gamma}{IH\cos\delta};$$

la comparaison des deux résultats donne $\tang\gamma = \tang\delta$, ou $\gamma = \delta$. Ainsi, les demi-droites IE et IH sont également inclinées sur IM et sur IN; il en est de même des demi-droites IE et IF; il suit de là que les demi-droites IF et IH sont opposées. En conséquence, les diagonales EG et FH passent en I, et sont également inclinées sur MM′ et NN′.

Il est facile de voir géométriquement que IM est bissectrice de l'angle $\widehat{EIH}$; plus généralement, étant donnés deux cercles et un de leurs points limites I, considérons une sécante qui les rencontre aux points E et H, M et M_1 : si U et V sont les deux points qui divisent harmoniquement, les segments EH et MM_1, le cercle de diamètre UV est orthogonal aux deux cercles donnés; ce cercle passe donc en I, l'angle UIV est droit, les droites IU et IV sont bissectrices de leurs angles EIH et MIM_1. Si la sécante devient tangente en M à l'un des cercles, la droite IM est bissectrice de l'angle EIH.

Si l'on se donne la droite FIH, ce qui détermine les points F

et H, on peut mener du point F deux tangentes au cercle (B), ce qui détermine deux points E; on a alors deux droites EHH; *la correspondance entre les droites* EIG *et* FHH *est une correspondance doublement quadratique.*

III. *c.* Si l'on suppose bien connue la théorie des polaires dans le cercle, comme le quadrangle EFGH est inscrit au cercle (O), on voit d'abord que les points R et S sont conjugués par rapport à ce cercle, d'où il suit que les circonférences décrites sur les segments RS comme diamètres sont orthogonales à la circonférence (O).

Le triangle diagonal du quadrangle EFGH est autopolaire par rapport au cercle (O); les côtés opposés EG et FH se croisent donc en un point qui est le pôle de RS, c'est-à-dire au point I, puisque le cercle (O) fait partie du faisceau (A, B); on a, en I, un faisceau harmonique (MM', NN', EG, FH), et c'est là une propriété de deux coniques bitangentes à une même conique. Le triangle variable IRS est autopolaire par rapport au cercle (O); son orthocentre est en O, et l'on a $\overline{JR}.\overline{JS} = -\overline{JO}.\overline{JI}$; comme on a aussi $\overline{JR}.\overline{JS} = -\overline{JA}.\overline{JB}$, on retrouve la relation $\overline{JO}.\overline{JI} = \overline{JA}.\overline{JB}$.

III. *d.* Le quadrilatère EFGH étant circonscrit à l'ellipse (C), le théorème de Brianchon montre encore que les diagonales EG et FH passent au point de croisement I des cordes de contact MM' et NN'; le faisceau en I est harmonique, de sorte que les droites rectangulaires MM' et XN' sont les bissectrices des angles que forment les droites EG et FH.

Le quadrangle EFGH étant inscrit à un cercle, les bissectrices des angles formés par les trois couples de côtés opposés aux points R, S, I, sont parallèles.

Remarque. — Le quadrilatère EFGH est un polygone de Poncelet, inscrit à un cercle fixe, et dont les côtés restent tangents à des cercles fixes, les divers cercles appartenant à un même faisceau. *On connait des polygones mobiles dont chaque sommet décrit une conique particulière, dont chaque côté reste tangent à une conique particulière; pour le cas des triangles, on trouve deux systèmes différents de six coniques* (*Nouvelles Annales*, 1897, p. 449 et 454).

Mathématiques spéciales.

On considère dans un plan la parabole (P) *et la droite* (D) *dont les équations sont, en coordonnées rectangulaires,*

$$y^2 - 2px = 0, \qquad y - a = 0.$$

I. *Une droite variable* (Δ), *issue de l'origine* O, *rencontre* (P) *en un point* A, *et* (D) *en un point* B; *trouver le lieu* (C) *des points* M *et* M' *symétriques par rapport à l'origine et conjugués harmoniques par rapport à* A *et* B, M *étant supposé constamment entre* A *et* B.

Les tangentes en M *et* M' *à* (C) *rencontrent respectivement en* I *et* I' *la tangente en* A *à* (P); *construire le lieu* (Γ) *des points* I *et* I' *et distinguer sur ce lieu les arcs qui correspondent à* I *des arcs qui correspondent à* I'.

Construire les tangentes en M *à* (C) *et en* I *à* (Γ).

II. *D'un point* I *de* (Γ) *on peut mener à* (C) *trois tangentes chacune d'elles rencontrant* (C) *en un point autre que le point de contact; montrer que les tangentes à* (C) *aux trois points ainsi définis concourent en un point* J *dont on exprimera les coordonnées en fonctions de celles de* I; *reconnaître si les tangentes menées de* I *ou de* J *à* (C) *sont réelles.*

Du point I *on mène à* (P) *une tangente autre que* IA; *soit* T *son point de contact; du point* I *on mène à* (C) *deux tangentes autres que* IM; *soient* T_1 *et* T_2 *les points, autres que les points de contact, où elles rencontrent* (C); *trouver le lieu du centre de gravité du triangle* TT_1T_2.

III. *Par l'origine on mène deux droites également inclinées sur les axes et rencontrant une tangente en un point* M *de* (C) *en des points* Q *et* Q'; *l'axe* OY *rencontre cette même tangente en* R; *trouver le lieu des points* Q' *et* Q *tels que la somme des inverses des longueurs* OQ, OQ' *soit égale à l'inverse de la longueur* OR.

Ce lieu comprend une partie d'une branche d'une courbe algébrique; trouver l'aire comprise entre cette branche et son asymptote.

Calcul différentiel et intégral.

I. *Soient* Δ *une droite donnée*, O *un point fixe sur cette droite.*

Déterminer les surfaces S *telles que la trace du plan tangent en un point quelconque* M, *sur le plan* ΔOM, *coupe le rayon vecteur* OM *sous un angle donné* α.

La recherche des surfaces S *se ramène à l'intégration d'une équation linéaire aux dérivées partielles* E; *indiquer comment on peut engendrer les surfaces* S *à l'aide d'une caractéristique choisie de cette équation.*

II. *Les surfaces* Σ *qui coupent les rayons vecteurs issus d'un point donné* O *sous un angle donné* α *sont les intégrales d'une équation* F *aux dérivées partielles du premier ordre.*

1° *L'équation* F *admet-elle des surfaces* S *comme solutions particulières ?*

2° *Déterminer les surfaces* Σ.

Comment une surface Σ *peut-elle être engendrée à l'aide d'une caractéristique choisie, par seul déplacement du plan de cette courbe ? Quelles sont ses lignes de courbure ?*

3° *Une surface* Σ *déterminée peut être engendrée d'une infinité de façons comme enveloppe de surfaces* S *ou* Σ *particulières.*

On peut toujours choisir la famille d'enveloppées de telle sorte qu'en tout point de contact l'enveloppe et l'enveloppée aient mêmes centres de courbure principaux.

4° *Toute surface* Σ *peut être obtenue comme intégrale commune à l'équation* F *et à une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre dont l'origine est analogue à celle de l'équation* E.

Mécanique.

Une boule pesante rencontre le sol supposé horizontal. On demande d'étudier son mouvement ultérieur à partir du moment où la boule touche le sol.

I. *On supposera la boule sphérique et homogène. On négligera la résistance de l'air et les frottements de roulement et de pivotement. On admettra l'hypothèse de Newton d'après laquelle la composante verticale de la vitesse du point* M *de la boule qui vient en contact avec le sol se trouve multipliée immédiatement après la rencontre avec le sol par un facteur négatif* $(-e)$ *qui ne dépend que de la nature des surfaces en contact, avec* $0 \leqq e \leqq 1$.

II. *La discussion devra surtout mettre en évidence s'il y a glissement ou non-glissement dans les contacts. Elle montrera que la forme de la trajectoire du centre* c *de la boule dépend essentiellement (pour des substances données) de l'angle aigu* θ_1 *de la verticale descendante avec la vitesse initiale du point* M, fixe sur la boule, *qui vient en contact avec le sol.*

III. *On appellera* m *la masse de la boule,* ρ *son rayon,* f *le coefficient de frottement de glissement de la boule contre le sol. On prendra comme origine des axes fixes la position initiale* o *du centre* c *de la boule quand elle arrive au sol et comme axe* oz *une verticale ascendante. On appellera* $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, p_1, q_1, r_1$ *les projections de la vitesse de* c *et de la vitesse angulaire de rotation instantanée de la boule au moment où elle touche le sol;* $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1, p'_1, q'_1, r'_1$, *les valeurs de ces projections après la rencontre;* v_1 *et* v'_1, *les valeurs initiale et finale, au moment de la rencontre avec le sol, de la composante horizontale de la vitesse du point* M, $\left[\operatorname{tang}\theta_1 = \frac{v_1}{(-\gamma_1)}\right]$.

Comme application de la discussion, on pourra indiquer, en supposant $e = \frac{1}{2}$, $f = \frac{2}{7}$, *les formes de la trajectoire de* c *pour* $\operatorname{tang}\theta_1 = 1$, $\operatorname{tang}\theta_1 = \frac{5}{2}$ *ou* $\operatorname{tang}\theta_1 = 4$. *On pourra aussi examiner le cas où* $\beta_1 = p_1 = 0$, $\operatorname{tang}\theta_1 < \frac{3}{2}$ *et* $\left(v_1 - \frac{7}{2}\alpha_1\right)$ *nul ou très petit.*

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1579.

(1888, p. 112.)

Si les nombres positifs $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sont tels que l'on ait $(a_n - n) = a$ pour n infini, on aura également

$$\lim \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n^2}\right)^{\frac{n}{4}} \sqrt[n]{a_1 a_2^2 a_3^3 \ldots a_n^n} = e^a.$$

E. Cesaro.

Solution,

Par M. G. Polya.

Prenons

$$a_1 = 1 + r_1, \qquad a_2 = 2 + r_2, \qquad \ldots, \qquad a_n = n + r_n, \qquad \ldots$$

et nous avons à examiner l'expression

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n^2}\right)^{\frac{n}{4}} \sqrt[n]{(1 - r_1)(2 + r_2)^2 \ldots (n - r_n)^n}$$

$$= \frac{e^{\frac{n}{4}}}{n^{\frac{n+1}{2}}} \sqrt[n]{1^1 2^2 3^3 \ldots n^n} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{r_1}{1}\right)\left(1 - \frac{r_2}{2}\right)^2 \cdots \left(1 + \frac{r_n}{n}\right)^n}.$$

Par hypothèse

$$\lim r_n = a,$$

$$\lim \left(1 - \frac{r_n}{n}\right)^n = e^a;$$

on en conclut aisément :

$$\lim \sqrt[n]{\left(1 - \frac{r_1}{1}\right)\left(1 + \frac{r_2}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{r_3}{3}\right)^3 \cdots \left(1 + \frac{r_n}{n}\right)^n} = e^a.$$

Reste à prouver que la limite du premier facteur est 1.

$$\frac{e^{\frac{n}{4}}}{n^{\frac{n+1}{2}}}\sqrt[n]{1^1 2^2 3^3 \ldots n^n} = e^{\frac{n}{4}}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{2}{n}}\left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{3}{n}}\cdots\left(\frac{n}{n}\right)^{\frac{n}{n}}$$

$$= e^{n\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\log\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\log\frac{2}{n}+\ldots+\frac{n}{n}\log\frac{n}{n}\right)\right]}.$$

On remarque que

$$\int_0^1 x\log x\,dx = \left|\frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}\right|_0^1 = -\frac{1}{4}$$

et l'exposant devient

$$n\left[\left(\frac{1}{n}\log\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\log\frac{2}{n}+\ldots+\frac{n}{n}\log\frac{n}{n}\right)\frac{1}{n}-\int_0^1 x\log x\,dx\right]$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{n} n\int_{\frac{\lambda-1}{n}}^{\frac{\lambda}{n}}\left(\frac{\lambda}{n}\log\frac{\lambda}{n}-x\log x\right)dx.$$

I. $\lambda = 1$.

$$n\int_0^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{n}\log\frac{1}{n}-x\log x\right)dx = \frac{1}{2n}\log\frac{1}{n}+\frac{1}{4n}.$$

II. $\lambda = 2, 3, \ldots, n$.

$$x\log x = \frac{\lambda}{n}\log\frac{\lambda}{n}+\left(x-\frac{\lambda}{n}\right)\left(1+\log\frac{\lambda}{n}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\lambda}{n}\right)^2\frac{1}{\frac{\lambda}{n}+\Theta\left(x-\frac{\lambda}{n}\right)}$$
$$(0<\Theta<1).$$

Quand x est resserré dans l'intervalle $\left(\frac{\lambda-1}{n}, \frac{\lambda}{n}\right)$

$$\frac{1}{\frac{\lambda}{n}+\Theta\left(x-\frac{\lambda}{n}\right)} < \frac{n}{\lambda-1} \qquad (\lambda>1).$$

En intégrant

$$\sum_{\lambda=1}^{n} n \int_{\frac{\lambda-1}{n}}^{\frac{\lambda}{n}} \left(\frac{\lambda}{n}\log\frac{\lambda}{n} - x\log x\right) dx$$

$$= \frac{1}{2n}\log\frac{1}{n} + \frac{1}{4n} + \sum_{\lambda=2}^{n} n\left[\frac{1}{2n^2}\left(1+\log\frac{\lambda}{n}\right) - \frac{\theta'}{6n^3}\,\frac{n}{\lambda-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{1}{n}\left(1+\log\frac{\lambda}{n}\right) - \frac{\theta''\sum_{\lambda=1}^{n=1}\frac{1}{\lambda}}{6n} - \frac{1}{4n}$$

$$\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}}{n} < \frac{1+\log(n-1)}{n}$$

devient nul pour n infini; nous n'avons qu'à chercher la limite de

$$\frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{n}\left(1+\log\frac{\lambda}{n}\right)\frac{1}{n} = \frac{1}{2}\left(1+\log\frac{\sqrt[n]{1.2.3\ldots n}}{n}\right).$$

Mais d'après la formule de Stirling

$$\lim \frac{1.2.3\ldots n}{n^n e^{-n}\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi},$$

$$\lim \frac{\sqrt[n]{1.2.3\ldots n}}{n\,e^{-1}n^{\frac{1}{2n}}} = 1, \qquad \lim \log\frac{\sqrt[n]{1.2.3\ldots n}}{n} = -1.$$

En rapprochant les extrêmes

$$\lim \frac{e^{\frac{n}{2}}}{n^{\frac{n+1}{2}}}\sqrt[n]{1^1 2^2 3^3\ldots n^n} = \lim e^{\frac{1}{2}\left(1+\log\frac{\sqrt[n]{1.2.3\ldots n}}{n}\right)} = 1.$$

C. Q. F. D.

Remarque. — En supposant $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ continus,

il est aisé de remarquer l'égalité

$$\lim_{n=\infty} n\left\{\left[f\left(\frac{b-a}{n}+a\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+f\left(2\frac{b-a}{n}+a\right)+\ldots+f(b)\right]\frac{b-a}{n}-\int_a^b f(x)\,dx\right\}$$
$$=\frac{b-a}{2}\int_a^b f'(x)\,dx.$$

Dans la démonstration précédente on était obligé d'établir la même égalité par un calcul plus détaillé, parce que ces conditions simples manquaient d'être remplies.

Autre démonstration (1). — Soit $f(x)$ une fonction telle que $f'''(x)$ converge vers zéro pour x infini, conservant le même signe, toujours diminuant en valeur absolue.

$$\int_0^x f(x)\,dx = \mathrm{F}(x),$$

$$\mathrm{F}\left(n-\frac{1}{2}\right) = \mathrm{F}(n) - \frac{1}{2}f(n) + \frac{1}{2!\,2^2}f'(n)$$
$$-\frac{1}{3!\,2^3}f''(n) + \frac{1}{4!\,2^4}f'''\left(n-\frac{\theta}{2}\right),$$

$$\mathrm{F}\left(n-\frac{1}{2}\right) = \mathrm{F}(n-1) + \frac{1}{2}f(n-1) + \frac{1}{2!\,2^2}f'(n-1)$$
$$+\frac{1}{3!\,2^3}f''(n-1) + \frac{1}{4!\,2^4}f'''\left(n-1+\frac{\theta'}{2}\right).$$

$$\mathrm{F}(n) - \mathrm{F}(n-1) - \frac{1}{2}[f(n-1)+f(n)]$$
$$+\frac{1}{2!\,2^2}[f'(n)-f'(n-1)] - \frac{1}{3!\,2^3}[f''(n-1)+f''(n)]$$
$$=\frac{1}{4!\,2^4}\left[f'''\left(n-1+\frac{\theta'}{2}\right)-f'''\left(n-\frac{\theta}{2}\right)\right].$$

---

(1) *Voir* Cesaro, *Lehrb. d. alg. Analysis* (p. 273), d'où nous avons empruntée la méthode suivie.

Faisons $n = 2, 3, \ldots, n$.

$$\begin{aligned}
F(n) - F(1) - \left[\frac{1}{2}f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) + \frac{1}{2}f(n)\right] \\
+ \frac{1}{2!\,2^2}[f'(n) - f'(1)] - \frac{1}{3!\,2^2}\left[\frac{1}{2}f''(1) + f''(2) + \ldots \right. \\
\left. + f''(n-1) + \frac{1}{2}f''(n)\right] \\
= \frac{1}{4!\,2^3}\left[f'''\left(1 + \frac{\Theta'}{2}\right) - f'''\left(2 - \frac{\Theta''}{2}\right)\right. \\
\left. + f'''\left(2 + \frac{\Theta'''}{2}\right) - \ldots - f'''\left(n - \frac{\Theta}{2}\right)\right].
\end{aligned}$$

La série à droite converge, ayant des termes à signes alternés et décroissants sans limite; c'est-à-dire, l'expression à gauche a une limite finie et déterminée pour n infini. Posons

$$F(x) = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}, \qquad f(x) = x\log x,$$

$$f'(x) = 1 + \log x, \qquad f''(x) = \frac{1}{x}, \qquad f'''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

En appliquant le résultat obtenu, il est facile de montrer que

$$\frac{\dfrac{n^2}{2}\log n - \dfrac{n^2}{4} - \left[1\log 1 + 2\log 2 + 3\log 3 + \ldots + (n-1)\log(n-1) + \dfrac{1}{2}n\log n\right]}{n}$$

tend vers zéro pour n infini. C. Q. F. D.

1580.

(1888, p. 112.)

Si dans la question précédente, on fait

$$b_n = \frac{2}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

on a

$$\lim \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{e}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \sqrt[n]{b_1 b_2^2 b_3^3 \ldots b_n^n} = e^{2a+1}.$$

E. Cesaro.

SOLUTION,

Par M. G. Polya.

On fait

$$a_1 = 1 + r_1, \qquad a_2 = 2 + r_2, \qquad \ldots, \qquad a_n = n + r_n,$$

$$b_1 = \frac{2}{1}(1 + r_1), \qquad b_2 = \frac{2}{2}(1 + 2 + r_1 + r_2) \qquad \ldots,$$

$$b_n = \frac{2}{n}(1 + 2 + \ldots + n + r_1 + r_2 + \ldots + r_n),$$

$$b_1 = 1 + 1 + 2r_1, \qquad b_2 = 2 + 1 + 2\frac{r_1 + r_2}{n},$$

$$b_n = n + 1 + 2\frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_n}{n}.$$

Comme dans la question précédente

$$\lim \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{e}{n^2}\right)^{\frac{n}{4}} \sqrt[n]{b_1 b_2^2 b_3^3 \ldots b_n^n}$$

$$= \lim \frac{e^{\frac{n}{4}}}{n^{\frac{n+1}{2}}} \sqrt[n]{1^1 2^2 3^3 \ldots n^n}$$

$$\times \lim \sqrt[n]{(1 + 1 + 2r_1)\ldots\left(1 + \frac{1 + 2\frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_n}{n}}{n}\right)^n}$$

$$= 1 \times e^{1+2a}.$$

1661.

(1894, p. 1.)

Démontrer que, si le rapport d'un terme au terme précédent dans la succession $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tend vers une limite finie et déterminée k, on a, pour n croissant à l'infini,

$$\lim \sqrt[n]{a_1^{u_n} a_2^{u_{n-1}} a_3^{u_{n-2}} \ldots a_n^{u_1}} = k^s,$$

$u_1, u_2, u_3, \ldots$ étant les termes d'une série convergente quelconque dont la somme est 1.

SOLUTION,

Par M. G. POLYA.

Posons

$$\log a_1 = \alpha_1, \qquad \log a_2 = \alpha_2, \qquad \ldots, \qquad \log a_n = \alpha_n, \qquad \ldots,$$
$$\lim \alpha_n = \log k.$$

Le logarithme de l'expression donnée est

$$\frac{\alpha_1 u_n + \alpha_2 u_{n-1} + \alpha_3 u_{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1} u_2 + \alpha_n u_1}{n}$$
$$= \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) u_n + (\alpha_2 - \alpha_3)(u_n + u_{n-1}) + \ldots}{n}$$
$$+ \frac{(\alpha_{n-1} - \alpha_n)(u_2 + u_3 + \ldots + u_n)}{n}$$
$$+ \frac{\alpha_n (u_1 + u_2 + \ldots + u_n)}{n}.$$

Le second membre converge vers

$$\lim \frac{\alpha_2 - \alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_2 + \ldots + \alpha_n - \alpha_{n-1}}{n} (u_1 + \ldots + u_n)$$
$$= \lim \frac{\alpha_n - \alpha_1}{n} \lim (u_1 + \ldots + u_n)$$
$$= s \log k.$$

Je dis que le premier converge vers o; soit :

$A \geqq |\alpha_i - \alpha_{i-1}|$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots,$
$S \geqq |u_{i+1} + u_{i+2} + \ldots + u_k| = |s_k - s_i|$ pour $i, k = 1, 2, 3, 4, \ldots,$
N un nombre entier choisi de manière que

$$|u_\mu + u_{\mu+1} + \ldots + u_\nu| \leqq \frac{\varepsilon}{2A}$$

pour $\mu, \nu = N+1, N+2, N+3, \ldots$; tous les trois nombres existent, par hypothèse. Le premier membre est donc plus petit que

$$\frac{(N-1)AS}{n} + \frac{A(n-N)}{n} \frac{\varepsilon}{2A}$$

pour tous les $n = N+1, N+2, \ldots$; alors on prendra n si

grand qu'on ait

$$\frac{(N-1)AS}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

QUESTIONS.

2181. — Trouver le lieu du centre d'un cercle inscrit à un triangle conjugué à une conique C, l'un des sommets du triangle variable étant fixe. N. Abramescu.

2182. — M étant un point d'une courbe (C), déterminer une autre courbe (C_1), telle que les tangentes aux points correspondants M et M_1 se coupent sur l'axe Ox. De même, déterminer la courbe (C_2), telle que les normales aux points correspondants M et M_2 se coupent sur Oy (axes rectangulaires).

Déterminer la courbe (C) par la condition que les tangentes aux points M_1, M_2, correspondant à un même point M de (C), soient parallèles.

Examiner le cas, où les courbes (C) et (C_2) passent à l'origine, de telle sorte que M_2 vienne coïncider avec l'origine en même temps que M.

Enfin, examiner le cas où la courbe (C_1) passe aussi à l'origine, de telle sorte que les points M_1 et M soient en même temps à l'origine.

Déduire un procédé pour l'intégration de l'équation différentielle

$$\frac{x+(1-m)yy'}{\alpha+\gamma y+(\beta-\gamma x)y'} = \sqrt{m(x^2+y^2)-m^2y^2+n}.$$

N. Abramescu.

[M²9e]

SUR CERTAINES SURFACES GÉNÉRALISANT LA CHAINETTE DE CORIOLIS;

PAR M. É. TURRIÈRE.

1. L'une des formules les plus remarquables de la théorie des surfaces, en coordonnées tangentielles, est certainement celle qui donne l'expression de la somme des rayons principaux de courbure R et R'; l'importance de cette expression découle de sa forme linéaire par rapport à la fonction qui individualise la surface et par rapport aux dérivées des deux premiers ordres de cette fonction.

Les axes sont rectangulaires; suivant les cas, suivant qu'il existe ou non une direction ou un axe privilégié (un axe de révolution, par exemple), il y a lieu d'utiliser l'une ou l'autre des équations

$$X\cos\varphi\cos\psi + Y\cos\varphi\sin\psi + Z\sin\varphi = \varpi,$$
$$u(X - iY) + v(X + iY) + (uv - 1)Z = (uv + 1)\varpi,$$

pour représenter le plan tangent. On a alors l'une ou l'autre des expressions

$$(1)\qquad R + R' = 2\varpi - \operatorname{tang}\varphi\frac{\partial\varpi}{\partial\varphi} - \frac{\partial^2\varpi}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial^2\varpi}{\partial\psi^2},$$

$$(2)\qquad R + R' = 2\varpi + (1 + uv)^2\frac{\partial^2\varpi}{\partial u\,\partial v}.$$

La seconde de ces expressions a été utilisée dans l'étude de certaines classes de surfaces, telles que les surfaces minima, les surfaces de M. Appell et les surfaces de M. Goursat. Je vais appliquer les relations

précédentes à une classe de surfaces qui généralisent les surfaces minima et qui s'introduisent en cherchant à étendre aux surfaces une propriété de la chaînette de Coriolis.

2. La chaînette d'égale résistance de Coriolis est caractérisée par la propriété suivante : la projection de tout rayon de courbure sur une direction fixe a une longueur constante. En cherchant à étendre cette propriété à des surfaces, on est conduit à se poser le problème suivant : *Soient* C, C′ *les centres de courbure principaux en un point* M *d'une surface* (S) *et* A *le milieu du segment* CC′; *déterminer les surfaces* (S) *pour lesquelles le segment* MA *se projette sur une direction fixe suivant un segment de longueur constante.*

Je prendrai l'axe OZ, appartenant à un système d'axes orthogonaux $Oxyz$ et parallèle à la direction considérée; je désignerai par $\frac{a}{2}$ la projection constante de MA sur OZ. R et R′ étant les rayons de courbure principaux, les surfaces (S) seront caractérisées par la propriété

$$R + R' = \pm \frac{a}{\sin\varphi}.$$

Pour $a = 0$, les surfaces (S) se réduisent évidemment aux surfaces minima.

Lorsque a est différent de zéro, il suffit de connaître une solution (S_0) du problème pour en déduire toutes les autres, par une construction géométrique fort simple. Considérant, en effet, une surface quelconque comme enveloppe du plan d'équation

$$p_1 x + p_2 y + p_3 z = \varpi,$$

où p_1, p_2, p_3 désignent les cosinus directeurs de la nor-

male au point de contact M avec la surface et où ϖ désigne la distance de l'origine des coordonnées O au plan tangent en M, soit ϖ_0 la fonction relative à la solution particulière (S_0) supposée connue; soit de même ϖ_1 la fonction ϖ relative à la surface minima générale (S_1). Dans ces conditions, il est évident que la solution ϖ la plus générale du problème posé est donnée par la formule

$$\varpi = \varpi_0 + \varpi_1,$$

qui s'interprète immédiatement : soient (Σ), (Σ_0), (Σ_1) les podaires de la surface générale cherchée (S), de la surface particulière (S_0) et de la surface minima générale (S_1), par rapport au point O; soient μ, μ_0, μ_1 trois points correspondants, respectivement sur (Σ), (Σ_0), (Σ_1), et alignés avec O; la relation précédente exprime qu'on a

$$O\mu = O\mu_0 + O\mu_1,$$

d'où la construction de μ connaissant μ_0 et μ_1 [1].

3. La solution particulière (s_0) peut être obtenue de plusieurs manières. On peut tout d'abord chercher les surfaces (S) qui sont de révolution autour de OZ. Posons

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$\frac{dz}{d\rho} = f(\rho);$$

l'équation aux dérivées partielles du second ordre des

---

[1] La méthode précédente est générale et s'appliquerait au cas où le segment MA serait une fonction quelconque et donnée des cosinus directeurs p_1, p_2, p_3.

surfaces (S) étant, en coordonnées ordinaires,

$$(3) \qquad a(rt + s^2) = r(1 + q^2) - 2pqs + t(1 + p^2),$$

la fonction f doit satisfaire à la relation

$$\frac{d\rho}{df}(af - \rho) = f(1 + f^2);$$

celle-ci est une équation différentielle du premier ordre, qui est linéaire par rapport à la fonction ρ envisagée comme étant une fonction inconnue de la variable f; et cette équation linéaire

$$\frac{df}{d\rho} = -\frac{\rho}{f(1 + f^2)} + \frac{a}{1 + f^2},$$

admet pour intégrale générale

$$\rho = -\frac{a}{f} + \frac{2A\sqrt{1 + f^2}}{f},$$

A désignant la constante arbitraire d'intégration; il en résulte alors, pour z, l'expression suivante

$$z = \mathrm{Log}\left\{ f^a \left(\frac{\sqrt{1 + f^2} + 1}{\sqrt{1 + f^2} - 1} \right)^A \right\},$$

à une constante additive près, qui peut évidemment être prise égale à zéro.

Pour la valeur zéro de a, les expressions précédentes de ρ et de z conduisent aux relations

$$f = \frac{1}{\mathrm{sh}\,\frac{z}{2A}}, \qquad \rho = 2A\,\mathrm{ch}\,\frac{z}{2A}$$

dont la seconde représente bien la chaînette ordinaire.

Pour toute autre valeur de a, les expressions précédentes de ρ et de z qui représentent la méridienne de

la surface de révolution cherchée peuvent être mises sous diverses formes en prenant pour paramètre un arc ω ou un argument θ liés à f par l'une ou l'autre des relations

$$f = \operatorname{sh} 2\theta,$$
$$f = \operatorname{tang} 2\omega.$$

Mais ce qui importe surtout c'est d'obtenir une solution simple du problème posé. Une solution de cette nature s'obtient aisément en particularisant la constante arbitraire A. En prenant $A = 0$, on obtient la surface engendrée par la courbe exponentielle

$$(4) \qquad -\frac{z}{a} = \operatorname{Log}\left(\frac{-\rho}{a}\right),$$

surface qui est homothétique à la surface

$$z = \operatorname{Log} \rho;$$

en prenant $A = \frac{1}{2} a \left(\text{ou } -\frac{1}{2} a\right)$ on obtient aussi une surface particulièrement simple; les expressions de ρ et de z se réduisant en effet à

$$\rho = \frac{af}{\sqrt{1+f^2}+1},$$
$$z = a \operatorname{Log}\left(\sqrt{1+f^2}+1\right),$$

il vient, à une constante additive près qu'il est permis de négliger,

$$(5) \qquad -\frac{z}{a} = \operatorname{Log}\left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right),$$

équation d'une surface homothétique à celle dont l'équation est

$$z = \operatorname{Log}(1 - \rho^2).$$

4. La détermination des surfaces de révolution qui

sont des solutions du problème posé, peut être également effectuée en coordonnées tangentielles. Puisque l'axe OZ est un axe de révolution, il y a lieu d'utiliser la relation (1)

$$R + R' = 2\varpi - \operatorname{tang}\varphi \frac{\partial \varpi}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \varpi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\cos\varphi} \frac{\partial^2 \varpi}{\partial \psi^2};$$

il s'agit de chercher les solutions ϖ indépendantes de la longitude ψ de l'équation aux dérivées partielles obtenue en écrivant

$$R + R' = \frac{a}{\sin\varphi}.$$

Je poserai

$$\varpi = \sin\varphi . \Phi,$$

Φ désignant une fonction de la seule variable φ; l'expression de $R + R'$ devient pour une surface générale de révolution

$$(6) \qquad R + R' = \frac{1}{\sin\varphi\cos\varphi} \frac{d}{d\varphi}\left(\sin^2\varphi \cos\varphi \frac{d\Phi}{d\varphi}\right);$$

l'équation différentielle du second ordre qu'il s'agit d'intégrer est donc réductible à deux quadratures, qui s'effectuent sans difficulté et donnent la relation

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1,$$

où l'on pose

$$\Phi_0 = -a \operatorname{Log}(\operatorname{tang}\varphi)$$

et où Φ_1 représente la fonction Φ relative au caténoïde; pour solution particulière (S_0), on peut donc prendre

$$(7) \qquad \varpi_0 = -a \sin\varphi \operatorname{Log}(\operatorname{tang}\varphi)$$

qui représente, à une translation près, la surface (4), précédemment obtenue.

5. Dans les deux paragraphes précédents, je me suis

occupé de la détermination d'une surface (S) de révolution. Mais il est possible de trouver des solutions particulières du problème par une méthode différente.

Étant donnée l'équation, en coordonnées ordinaires,

$$r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2) = 0,$$

des surfaces minima, Scherk a découvert la solution particulière dépendant d'un paramètre λ

$$(8) \qquad e^{\lambda z} = \frac{\cos\lambda y}{\cos\lambda x}$$

en cherchant une solution de la forme

$$z = \text{fonction de } x + \text{fonction de } y.$$

La même méthode appliquée à l'équation (3) conduit également à des surfaces (S) remarquables. Posant, en effet,

$$z = X(x) + Y(y),$$

cette équation (3) donne

$$(9) \qquad \frac{1+x'^2}{x''} + \frac{1+y'^2}{y''} = a,$$

après division par X'' et Y'' : l'une des dérivées secondes X'', Y'' ne peut être nulle, car d'après l'équation (3) les deux dérivées sont nulles si l'une est supposée l'être, en se bornant en outre aux surfaces réelles; supposer X'' et Y'' simultanément nulles conduit à une surface dégénérée en un plan arbitraire.

Dans la relation (9), les variables sont séparées; on doit donc poser, puisque les variables xy sont indépendantes,

$$\frac{1+x'^2}{x''} = a\,\frac{1+\lambda}{2},$$

$$\frac{1+y'^2}{y''} = a\,\frac{1-\lambda}{2},$$

λ désignant un paramètre arbitraire et constant; les deux équations différentielles du second ordre précédentes ont pour intégrales générales :

$$X = -\frac{a(1+\lambda)}{2}\operatorname{Log}\left(\cos\frac{2(x-x_0)}{a(1+\lambda)}\right) + X_0,$$
$$Y = -\frac{a(1-\lambda)}{2}\operatorname{Log}\left(\cos\frac{2(y-y_0)}{a(1-\lambda)}\right) + Y_0,$$

avec quatre constantes d'intégration x_0, y_0, X_0, Y_0, qu'il est permis de prendre égales à zéro. La surface (S_0) ainsi déterminée, et dépendant du paramètre λ, a donc pour équation :

$$-z = \frac{a(1+\lambda)}{2}\operatorname{Log}\left[\cos\frac{2x}{a(1+\lambda)}\right] + \frac{a(1-\lambda)}{2}\operatorname{Log}\left[\cos\frac{2y}{a(1-\lambda)}\right];$$

cette surface (S_0) présente une particularité intéressante : *les lignes conjuguées* $x =$ const., $y =$ const. *qui par translation engendrent la surface, sont des chaînettes de Coriolis.*

Les lignes asymptotiques et les lignes de plus grande pente, l'axe Oz étant supposé vertical, sont immédiatement déterminables, les équations différentielles correspondantes étant à variables séparées. Quant aux lignes de courbure, leur équation n'est à variables séparées que lorsque λ prend la valeur zéro; la surface (S) correspondante

$$e^{-\frac{2z}{a}} = \cos\frac{2x}{a}\cos\frac{2y}{a}$$

présente la plus grande analogie avec la surface minima de Scherk. Ces deux surfaces sont homothétiques aux surfaces d'équations

$$(10)\qquad \begin{cases} e^{-z} = \cos x \times \cos y, \\ e^{-z} = \dfrac{\cos x}{\cos y}; \end{cases}$$

les projections des lignes de plus grande pente de chacune d'elles sont superposables aux projections des lignes de niveau de l'autre.

Les lignes de courbure de la surface représentée par l'équation (10) s'obtiennent immédiatement, leur équation différentielle étant

$$\frac{dx^2}{\cos^2 x} = \frac{dy^2}{\cos^2 y};$$

il convient de remarquer que, puisque cette équation différentielle ne contient pas de terme en $dx\,dy$, la surface est intégrale particulière d'une équation aux dérivées partielles du second ordre

$$r(1+q^2) = t(1+p^2)$$

qui fut étudiée par Fuchs [1] et ramenée par lui à la forme

$$2(\alpha+\beta)\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} + \frac{\partial\omega}{\partial\beta}.$$

Pour terminer l'énumération des propriétés de la surface (10), je ferai observer que cette surface rentre dans la classe de surfaces d'équation

$$e^z \cos x \cos y = \text{const},$$

qui appartiennent à un des premiers systèmes triple-orthogonaux connus : d'où découle une nouvelle méthode de détermination de ses lignes de courbure.

6. Le problème que je m'étais proposé au deuxième

---

(1) Fuchs, *Integration der partiellen Differentialgleichung*

$$r(1+q^2) - t(1+p^2) = 0$$

(*Journal de Crelle*, 1860). L'équation considérée par Fuchs est celle des surfaces dont les tangentes principales sont, en projection sur Oxy et en direction dans ce plan, symétriques par rapport aux axes Ox, Oy.

paragraphe est donc complètement résolu, puisque j'ai obtenu diverses solutions particulières, dépendant d'ailleurs de constantes arbitraires, ce qui n'était pas nécessaire. Il est possible de prendre pour la solution particulière (S_0) l'une des surfaces simples et remarquables qui ont été signalées plus haut. Je choisirai, par exemple, la solution (7); elle est susceptible d'être mise sous la forme

$$\varpi = a\frac{1-uv}{uv+1}\operatorname{Log}\frac{uv-1}{\sqrt{uv}},$$

qu'il est possible d'obtenir directement d'ailleurs à partir de l'expression (2). Pour éviter l'introduction d'imaginaires dans l'équation des surfaces minima, j'utiliserai les coordonnées u et v, et non les coordonnées φ et ψ. Dans ces conditions, l'équation générale des surfaces (S) cherchées prend la forme

$$-\frac{\varpi}{a} = \frac{uv-1}{uv+1}\operatorname{Log}\frac{uv-1}{\sqrt{uv}} + U' + V' - \frac{2(vU+uV)}{uv+1}$$

dans laquelle $U(u)$ et $V(v)$ désignent deux fonctions arbitraires de chacune des variables u et v, et U', V' leurs dérivées.

[H11c]

SUR LA RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION INTÉGRALE A NOYAU SYMÉTRIQUE;

PAR M. A. PROSZYNSKI.

1. Je me suis proposé de trouver la solution de l'équation de M. Fredholm à noyau symétrique (ou plutôt : à noyau de M. Schmidt) par l'application

directe de la formule générale de M. Fredholm à ladite équation.

Soit l'équation intégrale

$$(1)\qquad f(s)+\lambda\int_0^1 K(s,t)\,f(t)\,dt=\psi(s).$$

La fonction $\psi(s)$ est donnée, $K(s,t)$ est donnée, c'est le noyau.

La fonction inconnue $f(s)$ est donnée par la formule de M. Fredholm

$$(2)\qquad f(s)=\psi(s)-\frac{\lambda\int_0^1 D(\lambda,s,t)\,\psi(t)\,dt}{D(\lambda)},$$

où $D(\lambda)$ et $D(\lambda,s,t)$ sont les séries entières en λ

$$\begin{aligned}(3)\quad D(\lambda)=1&+\frac{\lambda}{1!}\int_0^1 K(s_1s_1)\,ds_1\\&+\frac{\lambda^2}{2!}\int_0^1\int_0^1\begin{vmatrix}K(s_1s_1) & K(s_1s_2)\\ K(s_2s_1) & K(s_2s_2)\end{vmatrix}\\&\quad\times ds_1\,ds_2+\ldots\\&+\frac{\lambda^p}{p!}\int_0^1\cdots\int_0^1\begin{vmatrix}K(s_1s_1) & \ldots & K(s_1s_p)\\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\\ K(s_ps_1) & \ldots & K(s_ps_p)\end{vmatrix}\\&\quad\times ds_1\ldots ds_p+\ldots;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4)\quad &D(\lambda,s,t)\\&=-\int_0^1\psi(t)\,K(s,t)\,dt\\&\quad-\lambda\int_0^1\psi(t)\,dt\int_0^1\begin{vmatrix}K(st) & K(ss_1)\\ K(s_1t) & K(s_1s_1)\end{vmatrix}ds_1-\ldots\\&\quad-\frac{\lambda^p}{p!}\int_0^1\psi(t)\,dt\\&\quad\times\int_0^1\cdots\int_0^1\begin{vmatrix}K(st) & K(ss_1) & \ldots & K(ss_p)\\ K(s_1t) & K(s_1s_1) & \ldots & K(s_1s_p)\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\\ K(s_pt) & K(s_ps_1) & \ldots & K(s_ps_p)\end{vmatrix}\\&\quad\times ds_1\ldots ds_p-\ldots.\end{aligned}$$

En employant la notation de M. Fredholm

$$K(s_p s_q) \equiv (s_p s_q), \qquad \int_0^1 ds_1 \ldots \int_0^1 ds_p \equiv \underset{1.2\ldots p}{\mathbf{S}},$$

on peut écrire le terme général de la série (3) et celui e (4) sous la forme

$$u_{p+1} = \frac{\lambda^p}{p!} \underset{1.2\ldots p}{\mathbf{S}} \begin{vmatrix} (s_1 s_1) & \ldots & (s_1 s_p) \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ (s_p s_1) & \ldots & (s_p s_p) \end{vmatrix}$$

et

$$u_{p+1} = \frac{\lambda^p}{p!} \int_0^1 \psi(t)\, dt \underset{1.2\ldots p}{\mathbf{S}} \begin{vmatrix} (st) & (ss_1) & \ldots & (ss_p) \\ (s_1 t) & (s_1 s_1) & \ldots & (s_1 s_p) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ (s_p t) & (s_p s_1) & \ldots & (s_p s_p) \end{vmatrix}.$$

2. Si l'équation intégrale est de la forme

$$(5) \qquad f(s) - \lambda \int_0^1 K(s, t) f(t)\, dt = \psi(s),$$

où les λ sont négatifs, les séries (3) et (4) deviennent

$$(6) \quad D(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{1!} \underset{1}{\mathbf{S}} (s_1 s_1) + \ldots$$
$$+ (-1)^p \frac{\lambda^p}{p!} \underset{1.2\ldots p}{\mathbf{S}} \begin{vmatrix} (s_1 s_1) & \ldots & (s_1 s_p) \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ (s_p s_1) & \ldots & (s_p s_p) \end{vmatrix};$$

$$(7) \quad D(\lambda, s, t) = \int_0^1 \psi(t) K(s_1 t)\, dt$$
$$- \frac{\lambda}{1!} \int_0^1 \psi(t)\, dt \underset{1}{\mathbf{S}} \begin{vmatrix} (st) & (ss_1) \\ (s_1 t) & (s_1 s_1) \end{vmatrix} + \ldots$$
$$+ (-1)^p \frac{\lambda^p}{p!} \int_0^1 \psi(t)\, dt$$
$$\times \underset{1.2\ldots p}{\mathbf{S}} \begin{vmatrix} (st) & (ss_1) & \ldots & (ss_p) \\ (s_1 t) & (s_1 s_1) & \ldots & (s_1 s_p) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ (s_p t) & (s_p s_1) & \ldots & (s_p s_p) \end{vmatrix}.$$

La formule (2) s'écrit

$$(8) \qquad f(s) = \psi(s) + \frac{\lambda \int_0^1 D(\lambda, s, t)\,\psi(t)\,dt}{D(\lambda)}.$$

La fonction $f(s)$ est méromorphe en λ dans tout le plan de la variable complexe λ; ses pôles sont simples, ce sont les zéros de la fonction $D(\lambda)$. A chaque valeur de λ, différente de la racine de l'équation $D(\lambda) = 0$, correspond la solution unique de l'équation intégrale (5).

3. Appliquons maintenant ces résultats au cas de l'équation considérée par MM. D. Hilbert et Erhardt Schmidt.

Écrivons l'équation intégrale

$$(9) \qquad f(s) - \lambda \int_0^1 K(s, t)\, f(t)\, dt = \psi(s),$$

où le noyau $K(s, t)$ est assujetti aux conditions suivantes :

1° Il est symétrique

$$(10) \qquad K(st) \equiv K(ts).$$

2° Il est la somme de produits de fonctions qu'on appelle *les fonctions* φ

$$(11) \qquad K(st) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(s)\,\varphi_k(t)}{\lambda_k},$$

où n peut être un nombre fini ou infini.

3° Il est intégrable.

4° Son carré est aussi intégrable.

Le noyau $K(s, t)$ s'appelle le *noyau* de M. Schmidt.

4. Disons maintenant quelques mots sur les fonctions φ : $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, ...

Voici leurs propriétés :

1° Elles sont orthogonales

$$(12) \qquad \int_0^1 \varphi_k(s)\,\varphi_l(s)\,ds = 0 \qquad (k \neq l).$$

2° Elles sont normales

$$(13) \qquad \int_0^1 \varphi_k^2(s)\,ds = 1.$$

3° Elles sont linéairement indépendantes.

5. Les valeurs du paramètre λ, qui sont les zéros de la fonction $D(\lambda)$, sont appelées les *autovaleurs* (Hilbert, Schmidt). La suite des autovaleurs

$$(14) \qquad \lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \ldots$$

est : 1° dénombrable; 2° pour une autovaleur $\lambda = \lambda_i$ ne correspond qu'un nombre fini des fonctions φ, qu'on appelle *autofonctions;* 3° dans un intervalle fini, il existe un nombre fini d'autovaleurs; 4° les autres valeurs sont réelles; 5° à chaque autovaleur $\lambda = \lambda_l$ correspond une autofonction φ_l qui est une solution de l'équation intégrale homogène symétrique

$$(15) \qquad f(s) - \lambda \int_0^1 K(s, t)\,f(t)\,dt = 0.$$

L'ensemble d'autofonctions correspondant à toutes les autovaleurs relatif au noyau donné s'appelle le *système complet.*

MM. Hilbert et Schmidt démontrent *le théorème d'existence* qui est le plus essentiel dans cette théorie; voici l'énoncé de ce théorème :

« Si le noyau est symétrique en s et en t, il existe au moins une autovaleur λ_0 de λ [1]. »

6. Quelques questions en Mathématiques et surtout en Physique mathématique offrent des exemples de fonctions φ. Citons d'abord les polynomes de Legendre

$$\sqrt{\frac{3}{2}}x, \qquad \sqrt{\frac{5}{2}}\frac{3x^2-1}{2}, \qquad \ldots.$$

Les limites d'intégration sont $+1$, -1.

Les éléments de série de Fourier

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x, \qquad \sqrt{\frac{4}{\pi}}\cos 2x, \qquad \ldots, \qquad \sqrt{\frac{2n}{\pi}}\cos nx, \qquad \ldots.$$

Les limites d'intégration sont π et 0.

La suite des dérivées premières des intégrales de l'équation linéaire

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda A(x) = 0, \tag{16}$$

où λ n'est pas quelconque : ses valeurs sont les pôles de l'intégrale de (16), qui est une fonction méromorphe en λ; on démontre d'ailleurs que ces pôles sont réels et simples. Dans le problème des cordes vibrantes et celui du mur, l'intégrale de l'équation (16) est prise entre des limites finies, tandis que dans les problèmes d'armille, du refroidissement de la sphère, elle doit satisfaire aux conditions limites. La recherche de la fonction harmonique (les problèmes de Dirichlet et de Neumann) se ramène à l'équation intégrale de

---

[1] *Voir :* Picard, *Cours professé pendant le second semestre à la Faculté des Sciences de Paris, en* 1909, et d'Adhemard, *L'équation de Fredholm et les problèmes de Dirichlet et de Neumann*, 1909, Paris.

Fredholm

$$f(s)+\lambda\int_0^{\Gamma} f(\sigma)\frac{1}{\pi}\frac{\cos\varphi}{r}\,d\sigma=\frac{\psi(s)}{\pi},$$

où Γ est la longueur du contour, s est un point fixe, σ est un point mobile du contour; φ est l'angle de la normale extérieure au point σ avec le rayon r qui joint le point s au point σ; $f(s)$ est l'inconnue (la densité).

7. Cherchons maintenant la solution de l'équation (9). A cet effet, calculons d'abord la fonction $D(\lambda)$ donnée par la formule (6).

Le second terme se calcule immédiatement

$$(17)\qquad \int_0^1 K(s_1 s_1)\,ds_1=\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\frac{\varphi_i^2(s_1)\,ds_1}{\lambda_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}.$$

Calculons le déterminant d'ordre i qui figure dans la formule (6). A cause de la symétrie de $K(s,t)$ on peut écrire ce déterminant sous la forme

$$(18)\qquad \begin{vmatrix} K(s_1 s_1) & K(s_1 s_2) & \dots & K(s_1 s_i)\\ K(s_1 s_2) & K(s_2 s_2) & \dots & K(s_2 s_i)\\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots\\ K(s_1 s_i) & K(s_2 s_i) & \dots & K(s_1 s_i)\end{vmatrix}=\sum\pm\varphi_{11}\varphi_{22}\dots\varphi_{ii},$$

en désignant

$$(19)\qquad \varphi_{kl}=\frac{\varphi_1(s_k)\varphi_1(s_l)}{\lambda_1}+\frac{\varphi_2(s_k)\varphi_2(s_l)}{\lambda_2}+\dots+\frac{\varphi_n(s_k)\varphi_n(s_l)}{\lambda_n}.$$

Il s'agit maintenant de calculer le résultat de l'i-uple intégration du déterminant (18). La chose se simplifie considérablement à cause des propriétés des fonctions φ, (n° 5) qui entrent dans les éléments du déterminant en question.

Dans le développement du déterminant (18) nous aurons les termes suivants :

(a) Le terme

$$\varphi_{kk} \equiv \sum_{l} \frac{\varphi_l^2(s_k)}{\lambda_l}. \tag{20}$$

Le résultat de l'intégration est évidemment

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\lambda_l}.$$

(b) Des éléments φ_{jk} et φ_{kj} donnent, après une double intégration, le même résultat. En effet, à cause de (10) on écrit

$$\varphi_{jk}\varphi_{kj} \equiv \sum \left[\frac{\varphi_l(s_j)\,\varphi_l(s_k)}{\lambda_l}\right]^2. \tag{21}$$

En intégrant deux fois, on trouve

$$\int_0^1 \int_0^1 \sum \left[\frac{\varphi_l(s_j)\,\varphi_l(s_k)}{\lambda_l}\right]^2 ds_j\, ds_k = \sum_{l} \frac{1}{\lambda_l^2}. \tag{22}$$

8. Cela étant, je dis que dans le résultat de l'i-uple intégration du déterminant (18) on aura trois espèces de termes :

1° D'abord le terme principal qui, d'après (a), devient

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \varphi_{11}\varphi_{22}\ldots\varphi_{ii}\, ds_1\, ds_2 \ldots ds_i = \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k}\right]^i. \tag{23}$$

2° Considérons le produit

$$\varphi_{1k_1}\varphi_{2k_2}\cdots\varphi_{jk_j}\cdots\varphi_{ik_i}. \tag{α}$$

Supposons qu'il renferme l fois la somme φ_{jj} et m paires de sommes symétriques (φ_{pq}, φ_{qp}).

Le résultat d'intégration est

$$(24) \qquad \left[\sum_k \frac{1}{\lambda_k}\right]^l \left[\sum_k \frac{1}{\lambda_k^2}\right]^m.$$

3° Supposons que dans (α) se trouvent i facteurs : φ_{jk} où $j \neq k$ et que les indices de deux facteurs quelconques φ_{jk_j} et φ_{lk_l} soient tels qu'on ait $k_j \neq l$ et $j \neq k_l$. Dans ce cas, le résultat de l'i-uple intégration sera

$$(25) \qquad \sum_k \frac{1}{\lambda_k^i}.$$

Écrivons enfin l'i-uple intégrale d'un produit (α) composé de t sommes φ_{kk}, m paires (φ_{pq}, φ_{qp}) et j facteurs $\varphi_{r_1 f_1}\varphi_{r_2 f_2}\varphi_{r_j f_j}$ où $r_k \neq f_k$ et $r_k \neq f_l$, $r_l \neq f_k$,

$$(26) \qquad \left[\sum_k \frac{1}{\lambda_k}\right]^l \left[\sum_k \frac{1}{\lambda_k^2}\right]^m \sum_k \frac{1}{\lambda_k^j};$$

avec les conditions : 1° $l + 2m + j = i$; 2° $l \neq i$, $m \neq i$ (¹).

La vérification de ces résultats n'offre aucune difficulté.

Démontrons par exemple le 3°. Il faut calculer l'intégrale i-uple

$$(27) \qquad \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \varphi_{1a_1}\varphi_{2a_2}\cdots\varphi_{ia_i}\, ds_1\, ds_2 \ldots ds_2,$$

ou

$$\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(s_1)\,\varphi_k(s_{a_1})}{\lambda_k} \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(s_2)\,\varphi_k(s_{a_2})}{\lambda_k} \ldots ds_1 \ldots ds_k.$$

Parmi les nombres a_1, a_2, ..., a_i se trouvent évi-

(¹) Ces termes (26) se rencontrent pour la première fois dans le développement du déterminant du sixième ordre ($i = 6$).

demment 1, 2, ..., n; or, en faisant le produit des premiers termes de chaque somme Σ, on obtient

$$\frac{\varphi_1^2(s_1)\,\varphi_2^2(s_2)\ldots\varphi_i^2(s_i)}{\lambda_1^i},$$

l'i-uple intégrale de ce terme est donc

$$\frac{1}{\lambda_1^i}.$$

D'une pareille manière, le produit des seconds termes de chaque somme Σ est

$$\frac{\varphi_2^2(s_1)\,\varphi_2^2(s_2)\ldots\varphi_2^2(s_i)}{\lambda_2^i};$$

le résultat d'intégration est

$$\frac{1}{\lambda_2^i}.$$

Le résultat total est évidemment

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k^i}.$$

9. *Théorème.* — L'intégrale multiple (i-uple) du déterminant d'ordre i (18) est égale à la somme des $\binom{n}{i}$ termes, formés de la façon suivante : le numérateur de chacun de ces termes est $i!$ et le dénominateur est un produit de i facteurs $\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \ldots, \lambda_{k_i}$ dont les indices forment une certaine combinaison faite avec les nombres 1, 2, ..., n pris i à i. Or, nous avons la formule à démontrer

$$(28)\quad \int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 \sum \pm \varphi_{11}\varphi_{22}\varphi_{33}\ldots\varphi_{ii}\,ds_1\,ds_2\,ds_3\ldots ds_i$$
$$= i!\sum_{\binom{n}{i}}\frac{1}{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_i},$$

où $\left(\frac{n}{i}\right) \equiv \frac{n!}{i!\,(n-i)!}$ c'est le nombre de termes du développement. Pour démontrer ce théorème, remarquons d'abord que les formules (23), (24) [1], (25) montrent que le résultat de l'intégration du terme principal (23) contient un groupe de terme composé de $\frac{1}{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i}$ et que ce groupe n'a pas de semblables dans tout le développement, tandis que tous les autres groupes de termes ont des semblables. Je dis d'ailleurs qu'ils se détruisent. En effet, les éléments desquels sont formés tous les termes sont les suivants :

$$\begin{array}{cccc}
\frac{1}{\lambda_1}, & \frac{1}{\lambda_2}, & \ldots, & \frac{1}{\lambda_n}, \\
\frac{1}{\lambda_1^2}, & \frac{1}{\lambda_2^2}, & \ldots, & \frac{1}{\lambda_n^2}, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\
\frac{1}{\lambda_1^i}, & \frac{1}{\lambda_2^i}, & \ldots, & \frac{1}{\lambda_n^i}.
\end{array}$$

Si nous formons tous les groupes possibles homogènes de degré d'homogénéité égal à i, il est évident que ces groupes seront précisément ceux du développement du déterminant (18) après une i-uple intégration. Le coefficient de chaque groupe est le même dans l'ensemble de termes négatifs et dans celui de termes positifs, il est égal à $\frac{i!}{2}$; d'ailleurs chaque groupe $\left(\text{sauf le groupe composé de termes tels que } \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2, \ldots, \lambda_i}\right)$ a son semblable qui se trouve dans l'autre ensemble, et par conséquent tous ces groupes se détruisent mutuellement; il ne reste donc que le groupe

$$i! \sum \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_i} \quad [2].$$

---

[1] Pourvu qu'on ait $l \neq i$.

[2] Le calcul effectif montre que si i est pair, la somme des

10. Écrivons maintenant la fonction $D(\lambda)$. A cet effet, nous nous servons des formules (6), (18) et (28)

$$D(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{1!} 1! \sum \frac{1}{\lambda_k} + \frac{\lambda^2}{2!} 2! \sum \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} + \ldots$$
$$+ (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} n! \sum \frac{1}{\lambda_1 \ldots \lambda_n},$$

ou en simplifiant, on obtient finalement

$$(29) \quad D(\lambda) = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right).$$

On voit manifestement que les pôles de la fonction $D(\lambda)$ sont précisément les autovaleurs $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$

---

exposants de $\sum$ est paire dans l'ensemble positif et impaire dans l'ensemble négatif, en outre il y a $i-2$ termes différents dans l'ensemble positif et $i-3$ dans l'ensemble négatif. Voici les résultats finals :

$$i = 4 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \pm \sum \varphi_{11} \varphi_{22} \varphi_{33} \varphi_{44} \, ds_1 \, ds_2 \, ds_3 \, ds_4$$
$$= \left[\sum_k \frac{1}{\lambda_k}\right]^4 + 8 \sum_k \frac{1}{\lambda_k} \sum_k \frac{1}{\lambda_k^3} + 3 \left[\sum_k \frac{1}{\lambda_k^2}\right]^2$$
$$- 6 \left[\sum_k \frac{1}{\lambda_k}\right]^2 \sum \frac{1}{\lambda_k^2} - 6 \sum \frac{1}{\lambda_k^4}$$
$$= 24 \sum_1 \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}.$$

$$i = 5 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \pm \sum \varphi_{11} \ldots \varphi_{55} \, ds_1 \ldots ds_5$$
$$= \left[\sum_k \frac{1}{\lambda_k}\right]^5 + 20 \left[\sum_k \frac{1}{\lambda_k}\right]^2 \sum_k \frac{1}{\lambda_k^3}$$
$$+ 15 \sum_k \frac{1}{\lambda_k^3} \left[\sum_k \frac{1}{\lambda_k}\right]^2 + 24 \sum_k \frac{1}{\lambda_k^5} - 30 \sum_k \frac{1}{\lambda_k} \sum_k \frac{1}{\lambda^4}$$
$$- 10 \left[\sum_k \frac{1}{\lambda_k}\right]^3 \sum_k \frac{1}{\lambda_k^2} - 20 \sum_k \frac{1}{\lambda_k^2} \sum_k \frac{1}{\lambda_k^3}$$
$$= 120 \sum \frac{\lambda}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5}.$$

11. Calculons le numérateur de la formule (8), c'est-à-dire la fonction $D(\lambda, s, t)$ [on la désigne encore $\Delta(\lambda, s, t)$; *voir*, par exemple, R. D'ADHÉMARD, *L'équation de Fredholm*, 1909]. Il est presque évident que le déterminant d'ordre i qui figure dans (7) se réduit à son premier élément multiplié par le mineur correspondant, qui est précisément le déterminant considéré dans la fonction $D(\lambda)$.

Or nous aurons

$$(30)\quad \int_1^0 \cdots \int_0^1 \begin{vmatrix} K(st) & K(ss_1) & \dots & K(ss_{i-1}) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ K(s_{i-1}t) & K(s_{i-1}s_1) & \dots & K(s_{i-1}s_{i-1}) \end{vmatrix} ds_1 \dots ds_{i-1}$$

$$= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \sum \frac{\varphi_k(s)\varphi_k(t)}{\lambda_k}$$

$$\times \begin{vmatrix} \sum_k \frac{\varphi_k^2(s_1)}{\lambda_k} & \dots & \sum_k \frac{\varphi_k(s_1)\varphi_k(s_{i-1})}{\lambda_k} \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots \\ \sum_k \frac{\varphi_k(s_1)\varphi_k(s_{i-1})}{\lambda_k} & \dots & \sum_k \frac{\varphi_k^2(s_{i-1})}{\lambda_k} \end{vmatrix} ds_1 \dots ds_{i-1}$$

$$= \sum_k \frac{\varphi_k(s)\varphi_k(t)}{\lambda_k} (i-1)! \sum_{\binom{n}{i-1}} \frac{1}{\lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}.$$

Tous les autres mineurs du premier ordre s'annulent à cause de l'identité des éléments, de sorte que la fonction $D(\lambda, s, t)$ devient (7)

$$\begin{aligned} D(\lambda, s, t) = & \sum_k \frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k} \int_0^1 \varphi_k(t)\psi(t)\,dt \\ & - \frac{\lambda}{1} \sum_l{}' \frac{1}{\lambda_l} \sum \frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k} \int_0^1 \varphi_k(t)\psi(t)\,dt + \dots \\ & + (-1)^i \frac{\lambda^i}{i!} i! \sum \frac{1}{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_i} \sum_k \frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k} \\ & \times \int_0^1 \varphi_k(t)\psi(t)\,dt + \dots, \end{aligned}$$

ou en simplifiant, on trouve finalement

$$(31)\quad D(\lambda, s, t) = \sum_k \prod_l{}' \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_l}\right) \frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k} \int_0^1 \varphi_k(s)\psi(t)\,dt \quad (^1).$$

En mettant les formules (30), (31) dans (8) on obtient

$$f(s) = \psi(s) + \frac{\lambda \sum_k \prod_l{}' \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_l}\right) \frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k} \int_0^1 \varphi_k(t)\psi(t)\,dt}{\prod \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)},$$

ou en développant les Σ et Π on obtient finalement

$$(32)\qquad f(s) = \psi(s) + \lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k - \lambda} \int_0^1 \varphi_k(t)\psi(t)\,dt.$$

c'est la solution de l'équation (11).

M. E. Schmidt a trouvé cette formule par une méthode tout à fait différente, en s'appuyant sur « le théorème d'évidence ». (*Voir :* M. Picard, *Cours d'Analyse supérieure*, 1909, et R. d'Adhémard, *L'équation de Fredholm*, Paris, 1909.)

---

(1) $\prod_l{}' \left(i - \frac{\lambda}{\lambda_2}\right)$ $\left(\text{ou } \sum{}'\right)$ indique que l peut prendre toutes les valeurs sauf $l = k$

[M¹6g]

SUR LES TRIANGLES INSCRITS ET CIRCONSCRITS A UNE CARTÉSIENNE;

PAR M. R. BOUVAIST,
Enseigne de vaisseau.

L'équation générale d'une cartésienne en coordonnées trilinéaires normales est

$$[(ayz+bxz+cxy)-(ax+by+cz)(ux+vy+wz)]^2 \\ -(ax+by+cz)^3(\alpha x+\beta y+\gamma z)=0,$$

le cercle

$$(ayz+bxz+cxy)-(ax+by+cz)(ux+vy+wz)=0$$

ayant pour centre le foyer singulier de la courbe, et la droite

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=0$$

étant l'unique bitangente de celle-ci.

La courbe considérée passera par les sommets du triangle de référence. Si l'on a

$$\alpha=\frac{u^2}{a},\qquad \beta=\frac{v^2}{b},\qquad \gamma=\frac{w^2}{c}.$$

Elle sera tangente aux côtés du triangle si l'équation

$$b^2[2acv+(bw-cv)^2]y^2 \\ +bcyz[2(bw-cv)^2+2a(bw+cv)-a^2] \\ +c^2[2abw+(bw-cv)^2]z^2=0,$$

et les deux autres équations obtenues en permutant circulairement, a, b, c, u, v, w sont carrés parfaits.

Ces trois conditions équivalent aux suivantes :

$$bw + cv = \frac{a}{4},$$

$$cu + aw = \frac{b}{4},$$

$$av + bu = \frac{c}{4},$$

qui admettent pour solutions

$$u = \frac{\cos A}{4}, \qquad v = \frac{\cos B}{4}, \qquad w = \frac{\cos C}{4},$$

et l'équation de l'unique cartésienne circonscrite au triangle de référence est

$$\begin{aligned}&[4(ayz - bxz + cxy)\\ &\quad - (x\cos A + y\cos B + z\cos C)(ax + by + cz)]^2\\ &\quad - (ax + by + cz)^3\left[x\frac{\cos^2 A}{a} + y\frac{\cos^2 B}{b} + z\frac{\cos^2 C}{c}\right] = 0.\end{aligned}$$

1° *Points de contact de la courbe avec les côtés du triangle.*

Les droites joignant les sommets aux points de contact situés sur les côtés opposés sont

$$(1)\quad \begin{cases} by(a + 2c\cos B) - cz(a + 2b\cos C) = 0,\\ cz(b + 2a\cos C) - ax(b + 2c\cos A) = 0,\\ ax(c + 2b\cos A) - by(c + 2a\cos B) = 0;\end{cases}$$

la première de ces droites passe visiblement par le point

$$\left[0, \left(\frac{a}{2} + b\cos C\right)\sin C, \left(\frac{a}{2} + c\cos B\right)\sin B\right],$$

milieu du segment compris entre le milieu du côté BC et le pied de la hauteur perpendiculaire à ce côté.

Donc : *La cartésienne considérée touche les côtés*

du triangle ABC *aux pieds des perpendiculaires abaissées sur les côtés du centre du cercle des neuf points.*

Remarque. — Les droites (1) ne peuvent être concourantes que si le triangle considéré est isoscèle.

2° *Tangentes à la cartésienne aux sommets du triangle donné.*

Soit $y - \lambda z = 0$ la tangente à la courbe au point A; pour déterminer λ il suffit de former l'équation des droites joignant le point B, aux points d'intersection de cette droite avec la courbe et d'écrire que cette équation est divisible par z^2.

Il vient

$$c(c + 2b\cos A)^2\lambda + b(b + 2c\cos A)^2 = 0,$$

la tangente est par conséquent

$$\frac{y}{b}(c + 2b\cos A)^2 + \frac{z}{c}(b + 2c\cos A)^2 = 0.$$

La droite joignant les points de contact de la courbe avec les côtés CA et AB a pour équation

$$-ax + by\frac{c + 2a\cos B}{c + 2b\cos A} + cz\frac{b + 2a\cos C}{b + 2c\cos A} = 0,$$

la parallèle à cette droite menée par A a pour équation

$$y(b + 2c\cos A) + z(c + 2b\cos A) = 0,$$

le faisceau formé par cette droite et sa conjuguée par rapport à CA, AB est

$$y^2(b + 2c\cos A)^2 - z^2(c + 2b\cos A)^2 = 0;$$

le faisceau inverse

$$z^2(b + 2c\cos A)^2 - y^2(c + 2b\cos A)^2 = 0,$$

et la polaire du point à l'infini sur BC $\left(0, \frac{1}{b}, -\frac{1}{c}\right)$ est la tangente à la cartésienne en A.

Donc : *La tangente en* A *à la cartésienne est la médiane issue de* A *du triangle formé par* BC *et le faisceau inverse du faisceau formé par la parallèle à la droite joignant les points de contact de la courbe avec* CA *et* AB *et la conjuguée de celle-ci par rapport à* CA *et* AB.

3° *Foyer singulier de la cartésienne.* — On sait que, comme l'a démontré M. Humbert, les diamètres des cartésiennes sont perpendiculaires à leurs cordes correspondantes et passent par le foyer singulier. Dans le cas actuel, le foyer de la cartésienne sera par suite le point de concours des perpendiculaires élevées aux côtés du triangle, au milieu des segments compris entre le milieu de chaque côté et son point de contact avec la courbe. C'est visiblement le milieu du segment compris entre le centre O du cercle ABC et le centre O_1, du cercle des neuf points. Le foyer singulier est d'ailleurs le centre du cercle

$$\begin{aligned} &4(ayz + bxz + cxy) \\ &\quad - (x\cos A + y\cos B + z\cos C)(ax + by + cz) = 0; \end{aligned}$$

on vérifie facilement que c'est le point indiqué.

Le cercle précédent passe par les points d'intersection de la courbe avec la bitangente. La droite $x\cos A + y\cos B + z\cos C = 0$ étant l'axe orthique du triangle (axe radical du cercle circonscrit et du cercle des neuf points), on voit que le cercle considéré fait partie du faisceau déterminé par ces deux derniers.

Donc : *Le foyer singulier de la cartésienne est le milieu du segment compris entre les centres des*

cercles circonscrits et des neuf points et le cercle ayant pour centre ce point et passant par les contacts de la courbe avec la bitangente fait partie du faisceau déterminé par ces deux cercles.

4° *Bitangente de la cartésienne.* — La bitangente est la droite

$$\frac{x\cos^2 A}{a} + \frac{y\cos^2 B}{b} + \frac{z\cos^2 C}{c} = 0.$$

C'est la droite coupant les côtés du triangle, au milieu des segments compris sur chacun d'eux entre le pied de la hauteur perpendiculaire au côté considéré et l'intersection de ce côté avec l'axe orthique. C'est par suite, si l'on désigne par H_1, H_2, H_3 les pieds des hauteurs, le lieu des centres des coniques inscrites au triangle $H_1 H_2 H_3$ et tangentes à l'axe orthique, ou encore le lieu des centres des coniques conjuguées au triangle ABC et tangentes à l'axe orthique. Parmi ces dernières il y a deux hyperboles équilatères dont les centres sont les points d'intersection du cercle ABC avec la bitangente; ces hyperboles équilatères étant inscrites au triangle $H_1 H_2 H_3$, leurs centres sont sur le cercle conjugué au triangle $H_1 H_2 H_3$, la bitangente est par suite l'axe radical du cercle ABC et du cercle conjugué au triangle $H_1 H_2 H_3$.

Remarque. — L'équation de la bitangente peut s'écrire

$$\frac{x\cos^2 A}{a} + \frac{y\cos^2 B}{b} + \frac{z\cos^2 C}{c}$$
$$= \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - \frac{1}{2R}(ax + by + cz) = 0;$$

elle est donc parallèle à la droite joignant les points d'intersection des côtés avec les tangentes aux sommets opposés au cercle ABC.

5° *Point d'intersection de la cartésienne avec le cercle circonscrit au triangle donné.* — Les points d'intersection situés à distance finie, du cercle circonscrit et de la courbe sont sur la parabole

$$(x\cos A + y\cos B + z\cos C)^2$$
$$-(ax+by+cz)\left(x\frac{\cos^2 A}{a}+y\frac{\cos^2 B}{b}+z\frac{\cos^2 C}{c}\right)=0,$$

parabole dont l'axe est parallèle à l'axe orthique du triangle ABC; pour obtenir le quatrième point D l'intersection de la courbe, il suffit donc de mener par A une droite AD, faisant avec l'axe orthique le même angle que BC et de prendre son intersection D avec le cercle ABC.

Remarque. — La parabole considérée touche la bitangente de la cartésienne, et ses quatre autres points d'intersection avec cette dernière sont sur le cercle des neuf points du triangle ABC.

Si l'on prend pour origine le foyer singulier de la cartésienne et pour axe des x l'axe de la courbe, l'équation de celle-ci devient

$$(x^2+y^2-R^2)^2-k^3(x-a)=0.$$

On voit que la cartésienne est le lieu des points tels que le rapport du carré de leur puissance par rapport à un cercle fixe à leur distance à une droite fixe est constant.

Nous allons calculer, pour la cartésienne inscrite et circonscrite au triangle ABC, les trois paramètres de grandeur ρ^2, k^3, d.

1° *Calcul de* ρ^2. — Nous avons vu plus haut que le cercle Γ passant par les points d'intersection de la courbe avec la bitangente et ayant pour centre le foyer singulier F (milieu du segment compris entre le centre O du cercle circonscrit et le centre O_1 du cercle des neuf points) appartenait au faisceau formé par le cercle circonscrit et le cercle des neuf points. Nous aurons par conséquent, en désignant par R le rayon du cercle circonscrit,

$$\rho^2 + \overline{OF}^2 = \frac{5R^2}{8};$$

d'autre part

$$3R^2 = 3\overline{OG}^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

(G étant le centre de gravité de ABC) et

$$3OG = 4OF = OH$$

(H étant l'orthocentre de ABC), d'où

$$3R^2 = \frac{16\overline{OF}^2}{3} + \frac{a^2+b^2+c^2}{3},$$

d'où enfin

$$16\rho^2 = R^2 + a^2 + b^2 + c^2.$$

2° *Calcul de* k^3. — k^3 est égal au rapport changé de signe du carré de la puissance π du sommet A par

rapport au cercle Γ, à la distance de A à la bitangente

$$\frac{x\cos^2 A}{a} + \frac{y\cos^2 B}{b} + \frac{z\cos^2 C}{c} = 0.$$

L'équation du cercle Γ s'obtient en ajoutant membre à membre les équations des cercles O et O_1 ; il en résulte que la puissance π est la demi-somme des puissances de A par rapport aux cercles O et O_1 ou la demi-puissance de A par rapport à O_1, c'est-à-dire

$$\pi = \frac{bc\cos A}{4}.$$

La distance de A à la bitangente est

$$\delta_A = \frac{h_A\cos^2 A}{a\sqrt{P}},$$

h_A étant la hauteur de ABC issue de A et P étant égale à

$$\frac{\cos^4 A}{a^2} + \frac{\cos^4 B}{b^2} + \frac{\cos^4 C}{c^2}$$
$$- \frac{2\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C}{abc}\left[\frac{a}{\cos A} + \frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C}\right],$$

d'où

$$K^3 = -\frac{b^2c^2\cos^2 A}{16} \times \frac{a\sqrt{P}}{h\cos^2 A}$$
$$= -\frac{a^2b^2c^2\sqrt{P}}{32S} = -\frac{Rabc\sqrt{P}}{8};$$

reste à calculer $\sqrt{P}$.

$$P = \frac{\cos^4 A}{a^2} + \frac{\cos^4 B}{b^2} + \frac{\cos^4 C}{c^2}$$
$$- \frac{2\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C}{abc}\left(\frac{a}{\cos A} + \frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C}\right);$$

or

$$\frac{a}{\cos A} + \frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C} = \frac{abc}{4R^2 \cos A \cos B \cos C},$$

d'où

$$P = \frac{\cos^4 A}{a^2} + \frac{\cos^4 B}{b^2} + \frac{\cos^4 C}{c^2} - \frac{\cos A \cos B \cos C}{2R^2},$$

$$P = \frac{(4R^2 - a^2)^2}{16R^4 a^2} + \frac{(4R^2 - b^2)^2}{16R^4 b^2} + \frac{(4R^2 - c^2)^2}{16R^4 c^2}$$
$$- \frac{(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{16R^2 a^2 b^2 c^2},$$

$$P = \frac{1}{16R^4 a^2 b^2 c^2}\{4R^2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)[4R^2 - a^2 - b^2 - c^2]$$
$$- 16R^2 a^2 b^2 c^2 + a^2 b^2 c^2 (a^2 + b^2 + c^2)$$
$$+ R^2(a^2 + b^2 + c^2)^3\};$$

or

$$\begin{aligned} & a^2(b^2 + c^2 - a^2) + b^2(a^2 + c^2 - b^2) + c^2(a^2 + b^2 - c^2) \\ & = 2abc(a \cos A + b \cos B + c \cos C) \\ & = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - a^4 - b^4 - c^4 \\ & = -(a^2 + b^2 + c^2) + 4(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) \\ & = 2abc \times \frac{2S}{R} = \frac{a^2b^2c^2}{R^2}, \end{aligned}$$

d'où

$$4R^2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) = (a^2 + b^2 + c^2)^2 R^2 + a^2b^2c^2;$$

en tenant compte de cette relation la valeur de P devient

$$P = \frac{R^2(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 3a^2b^2c^2}{4R^2 a^2 b^2 c^2},$$

d'où

$$K^3 = -\frac{\sqrt{R^2(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 3a^2b^2c^2}}{16}.$$

Calcul de d. — La longueur d est la distance du

point F à la bitangente, le point F a pour coordonnées

$$\frac{R}{4}[3\cos A + 2\cos B\cos C],$$

$$\frac{R}{4}[3\cos B + 2\cos A\cos C],$$

$$\frac{R}{4}[3\cos C + 2\cos B\cos A];$$

$$d = \frac{\sum \frac{\cos^2 A}{a}\frac{R}{4}[3\cos A + 2\cos B\cos C]}{\sqrt{P}},$$

d'où

$$d\sqrt{P} = \frac{R}{4}\left[3\sum\frac{\cos^3 A}{a} + 2\cos A\cos B\cos C\sum\frac{\cos A}{a}\right],$$

$$\sum\frac{\cos^3 A}{a} = \frac{1}{abc}\sum\left[\frac{b^2+c^2+a^2}{2} - \frac{a^2 bc\cos A}{4R^2}\right]$$

$$= \frac{1}{abc}\left[\frac{a^2+b^2+c^2}{2} - \frac{abc}{4R}\right]$$

$$\times (a\cos A + b\cos B + c\cos C),$$

$$\sum\frac{\cos^3 A}{a} = \frac{1}{abc}\left[\frac{a^2+b^2+c^2}{2} - \frac{a^2b^2c^2}{8R^2}\right],$$

$$2\cos A\cos B\cos C\sum\frac{\cos A}{a}$$

$$= 2\cos A\cos B\cos C \times \frac{a^2-b^2+c^2}{2abc}$$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2}{abc} \times \frac{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{8a^2b^2c^2},$$

$$\cos A\cos B\cos C\sum\frac{\cos A}{a}$$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2}{abc} \times \frac{4(a^2+b^2+c^2)(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2) - 8a^2b^2c^2 - (a^2+b^2+c^2)^3}{8a^2b^2c^2},$$

ou en remplaçant

$$4(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2) \quad \text{par} \quad (a^2+b^2+c^2)^2 + \frac{a^2b^2c^2}{R^2},$$

$$2\cos A\cos B\cos C\sum\frac{\cos A}{a} = \frac{a^2+b^2+c^2}{abc}\,\frac{a^2+b^2+c^2-8R^2}{8R^2},$$

d'où

$$d\sqrt{P} = \frac{R}{4}\,\frac{R^2(a^2+b^2+c^2)^2 + 4R^4(a^2+b^2+c^2) - 3a^2b^2c^2}{8R^4abc},$$

d'où

$$d = \frac{R^2(a^2+b^2+c^2)^2 - 3a^2b^2c^2 + 4R^4(a^2+b^2+c^2)}{16R^2\sqrt{R^2(a^2+b^2+c^2)^2 - 3a^2b^2c^2}}.$$

Nous voyons que les trois paramètres ρ^2, k^3, d s'expriment en fonction de R^2, $a^2+b^2+c^2$, $a^2b^2c^2$; nous allons chercher à résoudre le problème suivant :

Étant donnée une cartésienne, déterminer les triangles inscrits et circonscrits.

Nous avons

$$d = \frac{-k^3}{R^2} + \frac{R^2(a^2+b^2+c^2)}{-4\times 16k^3} \quad \text{et} \quad a^2+b^2+c^2 = 16\rho^2 - R^2,$$

d'où

$$d = \frac{-k^3}{R^2} - \frac{(16\rho^2 - R^2)R^2}{16k^3\times 4};$$

la valeur de R^2 est déterminée par l'équation

$$R^6 - 16\rho^2R^4 - 64dk^3R^2 - 64k^6 = 0;$$

posons

$$R^2 = 4\theta,$$

l'équation devient

$$\theta^3 - 4\rho^2\theta^2 - 4dk^3\theta - k^6 = 0;$$

la condition pour que l'équation

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

ait ses trois racines réelles est

$$4q^3 - p^2q^2 + r[4p^3 - 18pq + 27r] < 0,$$

ce qui, dans le cas actuel, donne

$$(1) \qquad 27k^6 + 16k^3(18d\rho^2 - 16d^3) + 16\rho^4(\rho^2 - d^2) < 0.$$

La cartésienne

$$(x^2 + y^2 - \rho^2)^2 - k^3(x - d) = 0$$

est l'enveloppe des cercles

$$\lambda^2 k(x - d) + 2\lambda(x^2 + y^2 - \rho^2) + k^2 = 0.$$

Les trois foyers simples de la courbe situés sur l'axe s'obtiennent en écrivant que le rayon des cercles précédents est nul, ce qui donne l'équation

$$\lambda^3 + 8\frac{d}{k}\lambda^2 + 16\frac{\rho^2}{k^2}\lambda - 8 = 0;$$

la condition pour que cette équation ait ses trois racines réelles est

$$27k^6 + 16k^3(18d\rho^2 - 16d^3) + 16\rho^4(\rho^2 - d^2) < 0;$$

nous retrouvons l'inégalité (1).

Nous pouvons, par suite, énoncer la propriété suivante :

Une cartésienne peut avoir six triangles à la fois inscrits et circonscrits (deux à deux symétriques par rapport à l'axe de la courbe) et la condition nécessaire pour que ces six triangles soient réels est que les trois foyers de la courbe soient réels.

Si l'équation donnant les valeurs de R^2 a ses racines réelles, on voit, d'après le théorème de Descartes, que ces racines sont positives, leur somme étant égale à $16\rho^2$; les valeurs correspondantes de $a^2 + b^2 + c^2$ sont positives, mais il n'en est pas nécessairement de même pour les valeurs de $a^2b^2c^2$. La condition énoncée plus haut n'est donc pas suffisante.

Le problème qui consiste à construire un triangle connaissant le rayon du cercle circonscrit, la somme des carrés des côtés et la surface (ou le produit des côtés) n'est pas susceptible d'une solution géométrique; par suite, étant donnés un triangle et la cartésienne inscrite et circonscrite à celui-ci, il n'est pas possible de déterminer les triangles jouissant de la même propriété.

Remarque. — La courbe inverse de la cartésienne inscrite et circonscrite au triangle ABC (ce triangle étant pris comme triangle de référence) est une courbe du cinquième ordre admettant les points A, B, C et les points cycliques comme points de rebroussement. Par suite, étant donnés cinq points quelconques du plan, il existe une courbe du cinquième ordre et une seule, admettant ces points comme points de rebroussement. Je me propose d'énoncer les principales propriétés de cette courbe dans une étude ultérieure.

[L²10a]

NOTE SUR LES QUADRIQUES HOMOFOCALES;

PAR M. M.-F. EGAN.

I. Soit une quadrique S faisant partie d'un système homofocal Σ, et soit l une ligne géodésique ou une ligne de courbure sur S. Alors :

Le produit des distances d'un point M *qui se meut sur* l, *aux deux génératrices du système qui sont parallèles à la tangente en* M *à* l, *est constant.*

En effet, soit

$$(1) \qquad pu^2 + qv^2 + rw^2 - t^2 = \lambda(u^2 + v^2 + w^2)$$

l'équation du système Σ en coordonnées tangentielles u, v, w, t. Si l'on déplace le trièdre des axes d'une façon quelconque, cette équation devient

$$(2) \qquad f(u, v, w, t) = \lambda(u^2 + v^2 + w^2),$$

le coefficient de t^2 étant -1. Soit δ une droite parallèle au nouvel axe des z, et projetons le système sur le plan des xy par des plans tangents parallèles à δ. Cela revient à écrire $w = 0$. On a donc

$$f(u, v, 0, t) = \lambda(u^2 + v^2),$$

c'est-à-dire un système de coniques homofocales à paramètre λ. Le coefficient de t^2 étant -1, la différence des carrés des demi-axes majeurs des coniques λ_1, λ_2 sera donc $\lambda_1 - \lambda_2$.

Il est facile de voir, et il est d'ailleurs bien connu que les foyers du système de coniques seront les points où le plan des xy est percé par les deux génératrices du système Σ parallèles à δ. Soient r_1, r_2 les distances focales du point δ_0 où la droite δ perce le plan ; et soient λ_1, λ_2 les paramètres des coniques qui passent par δ_0, c'est-à-dire des quadriques auxquelles δ est tangente. Les axes des deux coniques étant $2a_1$ et $2a_2$, on a

$$r_1 + r_2 = 2a_1, \qquad r_1 - r_2 = 2a_2;$$

donc

$$r_1 r_2 = a_1^2 - a_2^2 = \lambda_1 - \lambda_2.$$

Or, les perpendiculaires abaissées, d'un point quelconque de δ, sur les génératrices du système qui lui sont parallèles, sont égales à r_1 et r_2. Leur produit est donc constant à condition que $\lambda_1 - \lambda_2$ le soit : ce qui démontre la proposition.

II. Si le système Σ est composé de quadriques obtenues par la révolution d'une conique autour de l'axe des foyers réels, on a le cas particulier suivant :

Le produit des perpendiculaires abaissées des deux foyers sur une droite δ, qui varie en touchant deux quadriques λ_1 et λ_2 du système, est égal à $\lambda_1 - \lambda_2$.

Cela se déduit sans peine du théorème précédent, mais il est peut-être plus simple de donner une démonstration directe.

Pour que λ_1, λ_2 et δ soient réelles, il faut que l'une des quadriques soit un ellipsoïde et l'autre un hyperboloïde. Soient P et Q les points de contact avec l'ellipsoïde (λ_1) et l'hyperboloïde (λ_2), et soient S et H les foyers. Alors les angles SPQ, HPQ sont supplémentaires et les angles SQP, HQP sont égaux. Si donc on fait tourner le triangle PQH autour de PQ, jusqu'à ce que H vienne prendre une position H′ dans le plan SPQ, les points S, P, H′ seront en ligne droite, et QP sera la bissectrice de l'angle SQH′. Si p_1, p_2 sont les distances de S et H à PQ, il vient

$$\begin{aligned} 4p_1p_2 &= SH'^2 - (SQ - QH')^2 \\ &= 4a_1^2 - 4a_2^2 \\ &= 4(\lambda_1 - \lambda_2). \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

CORRESPONDANCE.

M. L. Klug. — Dans la solution analytique de la question 2155 (t. XI, p. 330), *M. Barisien* a donné une généralisation. On peut de même démontrer assez simplement ce théorème plus général :

Si c, c_1 sont deux coniques confocales avec des axes focaux

$2a$, $2a_1$ et la distance focale $2d$: 1° les coniques bitangentes à c (ou à c_1) et ayant leurs foyers aux extrémités des diamètres de la conique c_1 (ou c) enveloppent un cercle concentrique à la conique c et de rayon $(a^2+a_1^2-d^2)^{\frac{1}{2}}$; 2° les coniques bitangentes à c (ou à c_1) et ayant leurs foyers aux extrémités des cordes parallèles aux axes focaux de c_1 (ou c) enveloppent deux droites perpendiculaires à cet axe à une distance $\frac{aa_1}{d}$ du centre de c.

Soient O le centre, F, F_1 les foyers, AA_1 un diamètre, AP une tangente à la conique c et BP une tangente à c_1 perpendiculaire à AP. Si B est le point de contact de la tangente, les parallèles par B aux droites AF, AF_1 et les rayons BF, BF_1, BA, BA_1 forment une involution symétrique; et les angles de ces derniers rayons avec BP sont égaux. A et A_1 sont donc les foyers d'une conique u, bitangente à c_1 aux extrémités du diamètre BB_1. De même, B et B_1 sont les foyers d'une conique u_1, bitangente à c aux extrémités du diamètre AA_1.

Les axes focaux de u et u_1 sont égaux à 2OP. Mais, si l'on fait varier les deux tangentes perpendiculaires AP, BP aux coniques c, c_1, le point P décrit un cercle du centre O et de rayon $(a^2+a_1^2-d^2)^{\frac{1}{2}}$ (où $2d=FF_1$ et $2a$, $2a_1$ sont les axes focaux de c, c_1); donc, la première partie du théorème est démontrée.

Si le cercle passant par FF_1 coupe c en C et C_1, c_1 en D et D_1, on peut démontrer, comme dans la première solution de la question 2155, que les axes focaux de la conique v ayant C et C_1 pour foyers et bitangente à c_1 aux points D et D_1, et de la conique v_1 ayant D et D_1 pour foyers et bitangente à c aux points C et C_1 sont égaux à $\frac{2aa_1}{d}$, donc, etc...

CERTIFICAT DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Alger.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *On considère les surfaces* (S) *et* (S′) *qui, rapportées à trois axes rectangulaires, ont res-*

pectivement pour équation

$$(S) \qquad x^2 + y^2 = z^2 \tang^2 \alpha,$$

$$(S') \qquad x^2 + y^2 - ax = 0,$$

α et a étant des constantes.

1° *Quelles sont ces surfaces? Figurer la projection de leur intersection sur le plan $x'Oz$.*

2° *Volume situé au-dessus du plan $z = 0$, au-dessous de la surface (S) et à l'intérieur de la surface (S'). L'axe Oz est supposé vertical.*

3° *Centre de gravité de ce volume supposé homogène.*

II. 1° *Intégrer l'équation différentielle*

$$(E) \qquad 2xy'y'' + 1 + y'^2 = 0.$$

2° *Construire la courbe intégrale (C) qui passe par $x = 1$, $y = 1$ et dont la tangente en ce point est parallèle à Ox.*

Montrer que la courbe (C) peut être représentée par les équations

$$x = \sin^2 t, \qquad y = t + \sin t \cos t,$$

où t est un paramètre variable.

3° *Comment peut-on déduire de la courbe (C) toutes les autres courbes intégrales de l'équation (E)?*

4° *Développée de la courbe (C).*

Épreuve pratique. — I. *Un point M, de masse égale à 1, mobile sur une droite, est attiré vers un point fixe O de la droite par une force 2 OM. Le point M est soumis en outre à une résistance dirigée en sens inverse de la vitesse et égale au double de la valeur absolue de cette vitesse. Les unités choisies sont celles du système C. G. S.*

1° *Trouver le mouvement de M. Étudier ce mouvement.*

2° *On suppose que, pour la position initiale M_0 du mobile, la vitesse initiale est nulle et OM_0 est égal à 10. Calculer la limite de la somme des chemins parcourus par le mobile lorsque le temps croît indéfiniment.*

II. 1° *Combien l'équation*

$$e^{x-1} - x - \frac{1}{c} = 0$$

a-t-elle de racines?

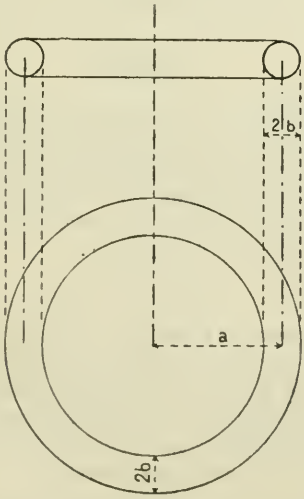
2° *Calculer ces racines à $\frac{1}{100}$ près.* (Juin 1910.)

Besançon.

Épreuve théorique. — *Question de cours.* — 1° *Vecteur tourbillon d'un champ vectoriel dérivable; théorème d'Ampère-Stokes; invariance du vecteur tourbillon; conditions* nécessaires et suffisantes *pour que l'expression* $X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z$ *soit une différentielle exacte, en supposant au préalable que les fonctions* X, Y, Z, *des variables* x, y, z *admettent des dérivées partielles.*

2° *Faisceau de rayons à deux paramètres; il n'existe pas en général de surface qui leur soit normale; condition pour qu'il en soit ainsi; si cette condition est satisfaite pour un faisceau, elle sera également satisfaite pour le faisceau provenant de la réflexion ou de la réfraction sur une surface quelconque.*

Problème. — x, y, z *désignant les coordonnées carté-*



siennes rectangles d'un point M, *trouver la surface intégrale la plus générale qui satisfait à l'équation aux dérivées partielles*

$$2yz\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} + 3xy = 0.$$

Particulariser la solution de manière que la surface intégrale contienne le cercle

$$z = 0$$
$$x^2 + y^2 - y = 0.$$

Définition géométrique de la surface.

Épreuve pratique. — 1° *Déterminer un polynome du quatrième degré par les cinq valeurs* 0, -1, 0, $+1$, 0 *que doit prendre ce polynome en correspondance avec les valeurs respectives de la variable* x :

$$-2, \quad -1, \quad 0, \quad +1, \quad +2.$$

2° *Calculer le moment d'inertie d'un tore homogène par rapport à son axe de révolution.*

Densité cubique de la matière du tore $= 1$.

Rayon du cercle décrit par le centre du cercle générateur $= a$.

Rayon du cercle générateur $= b$.

(Juillet 1911.)

Bordeaux.

Épreuve théorique. — *Soient* Ox, Oy *deux axes rectangulaires. On demande de déterminer dans le plan* xOy *une courbe* C *telle que si l'on mène en un point quelconque* M *de cette courbe la tangente* MT *et la normale* MN, *on ait, entre les abscisses* X_t, X_n *des deux points où ces droites rencontrent l'axe* Ox, *la relation*

$$X_t - X_n = 2a,$$

a étant une constante positive donnée.

En désignant par θ *l'angle aigu positif ou négatif que fait la normale* MN *avec* Ox, *exprimer les coordonnées du point* M *en fonction de* θ. *Toutes les courbes jouissant de la propriété en question se déduisent de l'une d'entre elles par une simple translation parallèle à* Ox. *Construire celle qui, pour* $\theta = \frac{\pi}{4}$, *donne une abscisse nulle* ($x = 0$) *pour le point* M *correspondant. Calculer la longueur de l'arc compris entre les deux points qui correspondent à* $\theta = 0$ *et à* $\theta = \frac{\pi}{4}$. *Déterminer le rayon de courbure pour chaque valeur de* θ.

Épreuve pratique. — *On donne les deux ellipses qui, en coordonnées rectangulaires, ont pour équations*

$$\frac{x^2}{3} + \frac{(y-3)^2}{12} - 1 = 0,$$

$$\frac{x^2}{1} + \frac{(y+1)^2}{4} - 1 = 0.$$

On demande de calculer à 0,001 *près l'aire commune à ces deux ellipses.*

(Juin 1910.)

Épreuve théorique. — I. *Exposer la méthode d'intégration d'une fraction rationnelle en supposant connues les racines du dénominateur.*

II. *Déterminer l'ordonnée y d'un point d'une courbe en fonction de l'abscisse x, de telle manière que, en tout point de cette courbe, le rayon de courbure* R *soit égal au carré de la dérivée seconde de y par rapport à x, c'est-à-dire*

$$R = y''^2.$$

Épreuve pratique. — *On considère le cercle* C *dont le diamètre* OA *est égal à l'unité.*

Par le point O *on fait passer une sécante variable* OP *sur laquelle on porte, à partir de* O, *une longueur* OM *telle que*

$$OM = \sqrt{OP}.$$

Le lieu du point M *est une courbe γ qui, en tournant autour de* OA, *engendre une surface de révolution* S. *On demande d'évaluer :*

1° *Le volume du solide limité par la surface* S;

2° *L'aire de la surface* S.

(Novembre 1910).

Caen.

Épreuve théorique. — *Les axes de coordonnées* Ox, Oy, *étant supposés rectangulaires, on considère la chaînette ayant pour équation*

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Soient P *un point de cette courbe*, H *sa projection sur* OX, (C) *le cercle de centre* P *et de rayon* PH.

L'enveloppe de ce cercle (C) *se compose :* 1° *de l'axe* OX, *qu'il touche au point* H; 2° *d'une certaine courbe* (S), *qu'on demande de déterminer, et qu'il touche en un point* M.

Construire cette courbe (S).

Vérifier que la distance des deux points H *et* M *est constante.*

Montrer que la longueur de l'arc décrit par le point M *sur la courbe* (S) *est égale à la longueur du segment rectiligne décrit pendant le même temps par le point* H *sur l'axe* OX.

Épreuve pratique. — *Les axes de coordonnées* OX, OY *étant supposés rectangulaires, un point mobile* (x, y) *décrit la parabole donnée*

$$y^2 = 2px.$$

Si, à partir de l'origine O, *on mène un vecteur équipollent au vecteur vitesse, l'extrémité* (a, b) *de ce vecteur équipollent décrit la parabole également donnée* (*hodographe*)

$$a^2 = 2qb.$$

Cela posé, on demande :

1° *De calculer* $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ *en fonction de* y;

2° *De montrer que la vitesse aréolaire par rapport à l'origine est constante;*

3° *De calculer* x *et* y *en fonction de* t.

(Juin 1910.)

Épreuve théorique. — *Les axes de coordonnées* OX, OY *étant supposés rectangulaires :*

1° *Construire la courbe ayant pour équation*

$$y = \frac{x}{1 + x^2}.$$

2° *On considère seulement la portion de la courbe précédente qui correspond aux valeurs positives de* x. *Soient, sur cette portion de courbe :*

A *le point d'ordonnée maximum;*

M_1 *le point d'abscisse* x_1;

M_2 *le point d'abscisse* x_2, *qu'on supposera situé à droite du point* A.

Déterminer la relation qui doit exister entre x_1 *et* x_2 *pour que l'aire comprise entre l'arc* OM_1, *l'axe des* x *et les ordonnées des points* O *et* M_1, *soit égale à l'aire analogue comprise entre l'arc* AM_2, *l'axe des* x, *et les ordonnées des points* A *et* M_2.

3° *Étudier comment varie la distance mutuelle des projections des points* M_1 *et* M_2 *sur* OX, *lorsque ces deux points varient en satisfaisant à la condition ci-dessus spécifiée. Montrer que cette distance possède un minimum.*

4° *En désignant par* M'_1 *et* M'_2 *les positions des points* M_1 *et* M_2 *qui correspondent à ce minimum, calculer le volume engendré par la rotation autour de* OX *de l'arc* $M'_1M'_2$ *complété par les ordonnées des points extrêmes.*

Épreuve pratique. — 1° *Intégrer l'équation différentielle*

$$y' + y = 2e^x$$

(*e désigne la base des logarithmes népériens*).

2° *Indiquer les diverses formes que peuvent présenter les courbes intégrales de l'équation précédente ;*

3° *Quel est le lieu des points d'inflexion de ces courbes, et le lieu des points où la tangente est parallèle à l'axe des* x ?

(Novembre 1910.)

Épreuve théorique. — I. *Calculer la constante* λ *de manière que l'expression*

$$\frac{x^2}{x+\lambda y}\,dx + \frac{3y^2}{y+\lambda x}\,dy$$

soit la différentielle totale d'une fonction $U(x, y)$, *et déterminer cette fonction.*

En désignant par OX, OY *deux axes rectangulaires, construire les courbes*

$$U(x, y) = \text{const.},$$

ainsi que leurs trajectoires orthogonales.

II. *Étant donnés trois axes rectangulaires* OX, OY, OZ :

1° *Déterminer toutes les courbes intégrales du système d'équations différentielles*

$$\frac{dx}{dz} = -x + y - 2\alpha^2 z,$$

$$\frac{dy}{dz} = 2x - 2z^2 + 2(\alpha + 1)z + 2\alpha^2 - \alpha + 2,$$

où α *désigne une constante.*

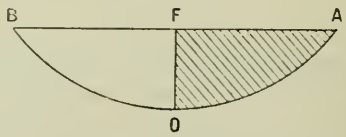
2° *Déterminer celle de ces courbes qui passe par le point*

$$x = 0, \qquad y = -\alpha, \qquad z = 0;$$

montrer que cette courbe est une parabole, et former l'équation de son plan P.

3° *Trouver l'enveloppe des plans* P *lorsque* α *varie.*

Épreuve pratique. — *Étant donnée une parabole dont le sommet* O *et le foyer* F *sont distants de* 1^{m}, *on considère la*



corde AFB, *perpendiculaire en* F *sur* OF, *et l'on demande de calculer :*

1° *En décimètres carrés l'aire de la portion de paraboloïde engendrée par la rotation de l'arc* OA *autour de* OF;

2° *En décimètres cubes le volume du solide engendré par la rotation de l'aire* FAOF *autour de* OF;

3° *En décimètres la longueur de l'arc* AOB *de la parabole.*

(Juin 1911.)

Grenoble.

Épreuve théorique. — I. *Construire la courbe*

$$(x - y)^2 = x + y.$$

Calculer son rayon de courbure à l'origine.

II. *Intégrer l'équation*

$$y''' - 3y'' + y' - 3y = \sin x;$$

déterminer la courbe intégrale de façon qu'elle ait un point d'inflexion à l'origine, la tangente d'inflexion étant l'axe des x.

III. *On considère dans l'espace une courbe* C, *la tangente* T *et le plan normal* P *en un point. La tangente coupe le plan des* xy *en un point* A *et le plan normal coupe le même plan suivant une droite* D; *déterminer la courbe* C *de façon que le pied de la perpendiculaire abaissée de* A *sur* D *soit un point fixe qu'on pourra supposer placé à l'origine des coordonnées.*

Épreuve pratique. — I. *On considère la fonction*

$$y = \int_0^x \sin^2 x \cos^2 x \, dx.$$

Étudier les variations de cette fonction. Construire la courbe. Points d'inflexion.

Mener par l'origine des coordonnées les tangentes à la courbe. Calculer à 0,01 *près l'abscisse de celui des points de contact qui a la plus petite abscisse positive.*

Calculer l'intégrale

$$\int \frac{x^3 \, dx}{(x^2+1)^2 (x-1)}.$$

(Novembre 1910.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2170.

(1911, p. 93.)

On donne une courbe plane (C) *et un point fixe* O *dans son plan. On porte sur la tangente, en un point* M *de* (C),

une longueur MP *égale au rayon vecteur* OM. *Déterminer la tangente en* P *à la courbe lieu de ce point.*

A. Duby.

Solution,

Par M. O.

Soient ω et θ les angles que OM et MP font respectivement avec Ox, m le centre de courbure répondant au point M, N et p les points où la normale en M à la courbe (C) est rencontrée respectivement par la perpendiculaire élevée en O à OM et par la normale en P à la courbe que décrit ce point. On a

$$d.\mathrm{OM} = \mathrm{ON}.d\omega, \qquad d.\mathrm{MP} = mp.d\theta;$$

d'où

$$\mathrm{ON}.d\omega = mp.d\theta.$$

Mais si ds est la différentielle de l'arc de la courbe (C) en M, on a encore

$$ds = \mathrm{MN}.d\omega = \mathrm{M}m.d\theta.$$

On tire de là

$$\frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{MN}} = \frac{mp}{\mathrm{M}m}.$$

Il en résulte que *si* $m\mu$ *est la perpendiculaire abaissée du centre de courbure* m *sur le rayon vecteur* OM, *on a* $mp = m\mu$. De là, la construction demandée. Si l'on reporte $m\mu$ en sens contraire sur la normale MN, on obtient le point q déterminant la normale à la courbe décrite par le point Q obtenu en portant MO, dans le sens contraire aussi, sur la tangente.

Autres solutions par MM. Abramescu, Bouvaist et Klug.

ERRATA.

1911, page 335, ligne 1 en remontant, *au lieu de* P^2, *lire* R^2.

1911, page 335, ligne 3 en remontant, *au lieu de* son cercle orthoptique S, *lire* un cercle concentrique S.

1911, page 336, ligne 1, *au lieu de* $R^2 = a + b^2$, *lire* $R^2 = a^2 + b^2$.

1911, page 336, ligne 7, *au lieu de* d'où l'aire, *lire* dont l'aire.

[O¹5j]

SUR LES COURBES PLANES, QUI SONT A ELLES-MÊMES LEURS POLAIRES RÉCIPROQUES;

PAR M. PAUL SUCHAR,
Professeur au Lycée de Pau.

1. Je me propose de déterminer les courbes planes qui sont à elles-mêmes leurs polaires réciproques par rapport à un cercle, ainsi que les courbes qui coïncident avec leurs polaires réciproques par une rotation autour du centre du cercle directeur. Je dois d'abord signaler sur un sujet analogue un article de M. Fouret, *Sur les courbes planes ou surfaces qui sont leur propre polaire réciproque par rapport à une infinité de coniques* (*Bulletin de la Société philomatique*, 1877, p. 42-45). Dans cette Note, M. Fouret montre que les seules courbes possédant la propriété indiquée, sont les courbes triangulaires signalées par MM. Klein et Lie. Enfin, M. Appell a étudié, au point de vue géométrique, le problème que nous avons en vue, dans deux articles *Sur les courbes autopolaires* (*Bulletin de la Société mathématique*, 7 février 1894, et *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3ᵉ série, mai 1894). Dans ces Notes, M. Appell désigne, sous le nom de *courbe* et *conique autopolaire*, une courbe qui est à elle-même sa polaire réciproque par rapport à une conique donnée. M. Appell montre que la conique la plus générale, autopolaire, est bitangente à la conique fondamentale et dépend en outre de deux paramètres. En établissant une relation quelconque

entre les deux paramètres, M. Appell démontre que l'enveloppe de ces coniques se compose de la conique fondamentale donnée et d'une courbe C, qui, si elle ne se décompose pas en deux courbes distinctes, polaires réciproques l'une de l'autre, elle est autopolaire par rapport à la même conique fondamentale.

2. La recherche des courbes qui fait l'objet de notre travail, constitue un problème très général dont les solutions sont en nombre infini, et ne semblent pas devoir être comprises facilement dans une formule unique. Je suis parvenu à résoudre le problème dans sa généralité en le rattachant à la Mécanique. Je regarde les courbes cherchées comme étant les trajectoires décrites par un point matériel, et je démontre au n° 4 le théorème suivant :

Si, quelles que soient les conditions initiales, la trajectoire d'un point matériel est plane, et si elle est à elle-même (la courbe hodographe) sa polaire réciproque par rapport à un cercle, la force qui le sollicite passe par (l'origine de l'hodographe) le centre du cercle directeur.

Rappelons encore un théorème que nous avons démontré dans les (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4e série, t. II, 1902) et qui nous sera utile :

La courbe hodographe correspondant à la trajectoire décrite par un point matériel sous l'action d'une force centrale et ayant pour origine le centre de la force, coïncide, après une rotation de 90° autour de ce centre, avec la polaire réciproque de la trajectoire par rapport à un cercle ayant pour centre le centre de la force, et pour rayon la

racine carrée du nombre qui est la constante des aires.

D'après ce dernier théorème, la recherche d'une solution s'obtiendra, en supposant la courbe comme étant la trajectoire décrite par un point matériel, sous l'action d'une force centrale, ayant pour centre le centre du cercle directeur. On effectue ensuite, sur les coordonnées du point, ainsi que sur le temps, une transformation convenable, ayant pour but de transformer la force en une autre également centrale, et le mouvement en un autre, ayant pour nouvelle trajectoire la courbe hodographe correspondant à la nouvelle trajectoire, ou bien la polaire réciproque de la même trajectoire, par rapport au cercle directeur. On disposera ensuite de la loi de la force qui est encore inconnue, pour que, par la même transformation, le premier mouvement se transforme en lui-même, et que la trajectoire se transforme en elle-même, le mouvement sur cette dernière trajectoire étant en général différent du premier. Remarquons que le problème étant ainsi présenté, il peut être considéré comme un exemple d'un problème résolu par M. Painlevé, *Sur la transformation des équations de la dynamique* (*Journal de Math.*, 4e série, t. X, 1894). Je dois cependant faire remarquer qu'aucune restriction n'est faite sur la loi de la force. J'entends par là que la loi de la force peut dépendre aussi bien de la position du point matériel que des composantes de la vitesse de ce point sur les axes des coordonnées.

3. Soient x et y les coordonnées par rapport à deux axes rectangulaires Ox, Oy, d'un point matériel, que pour simplifier nous supposons de masse égale à 1. Les

équations du mouvement où l'origine des axes est le centre de la force sont

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \pm ux, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \pm uy; \end{cases}$$

le double signe correspond au cas d'une force répulsive ou attractive; enfin u est une fonction inconnue qui peut dépendre en général de x et y et de x' et y', x' et y' étant les projections de la vitesse sur les axes Ox et Oy.

Considérons un second point matériel de même masse que le premier et dont les coordonnées par rapport à Ox et Oy sont x_1 et y_1, et qui se meut dans le temps t_1.

Effectuons la transformation suivante, en posant

$$(2)\qquad x_1 = x', \qquad y_1 = y', \qquad \frac{dt_1}{dt} = \pm u.$$

Différentions les deux premières relations (2) par rapport à t_1; on aura, en désignant par x'_1, y'_1 les dérivées de x_1, y_1 par rapport à t_1, et x'', y'' les dérivées de x' et y' par rapport à t,

$$x'_1 = x'' \frac{dt}{dt_1}, \qquad y'_1 = y'' \frac{dt}{dt_1},$$

d'où, en ayant égard à (1) et (2), on a

$$(3)\qquad x'_1 = x, \qquad y'_1 = y.$$

Différentions une dernière fois ces dernières relations, on a

$$x''_1 = x' \frac{dt}{dt_1}, \qquad y''_1 = y' \frac{dt}{dt_1};$$

en ayant égard à (2), on a

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt_1^2} = \pm \dfrac{1}{u} x_1, \\ \dfrac{d^2y_1}{dt_1^2} = \pm \dfrac{1}{u} y_1. \end{cases}$$

Ces équations sont les équations du mouvement du point de coordonnées x_1, y_1, et où l'on doit remplacer dans la fonction u, d'après (2) et (3), x et y par x'_1, y'_1, et x' et y' par x_1 et y_1. Nous remarquons que, par cette transformation, le premier mouvement se transforme en un autre, où la force est encore centrale, le centre de la force étant le même point que dans le premier mouvement et ayant pour trajectoire la courbe hodographe correspondant au premier mouvement; le mouvement sur cette dernière courbe a lieu d'ailleurs dans le temps t_1. Remarquons que si l'on a égard au second théorème énoncé au n° 2 et si, au lieu d'effectuer les transformations (2) et (3), nous effectuons la transformation

$$(5)\qquad x_1 = y', \qquad y_1 = -x', \qquad \frac{dt_1}{dt} = \pm u.$$

on en déduit comme précédemment par différentiations

$$(6)\qquad x'_1 = y, \qquad y'_1 = -x,$$

et pour les équations du mouvement

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt_1^2} = \pm \dfrac{1}{u} x_1, \\ \dfrac{d^2y_1}{dt_1^2} = \pm \dfrac{1}{u} y_1, \end{cases}$$

où l'on doit effectuer sur la fonction u les transformations (5) et (6). Le mouvement défini par le système (1) se transforme ainsi en un autre, ayant pour trajec-

toire la polaire réciproque correspondant à cette trajectoire, par rapport au cercle qui figure dans l'énoncé du théorème du n° 2. Il résulte donc d'après ce qui précède que la trajectoire correspondant au système (1) coïncide avec la courbe hodographe, ou bien avec la polaire réciproque, si ce système se transforme en lui-même par les transformations (2) et (3), ou par les transformations (5) et (6), ce qui exige que la fonction u soit de la forme

$$u = \frac{f(x, y, x', y')}{f(x', y', x, y)} \tag{8}$$

dans le premier cas, ou encore de la forme

$$u = \frac{f(x^2, y^2, x'^2, y'^2)}{f(x'^2, y'^2, x^2, y^2)}, \tag{9}$$

où f est une fonction arbitraire, et de plus cette dernière expression est symétrique par rapport à x et y, ainsi que par rapport à x' et y'.

Il est facile de montrer que toute solution du système (1) est une solution du problème, si la fonction u est du type (8) ou (9), la fonction f étant donnée. En effet, soit

$$\Psi(x, y, x_0, y_0, x'_0, y'_0) = 0 \tag{10}$$

l'intégrale générale du système (1), où nous avons exprimé les constantes d'intégration en fonction des conditions initiales. Nous aurons l'équation de la courbe hodographe correspondant à cette dernière équation en lançant le mobile d'après (2) et (3) avec les conditions initiales suivantes : les coordonnées du point initial sont x'_0 et y'_0, et les composantes de la vitesse initiale, x_0 et y_0. Le système (1) se transformant en lui-même, l'équation de l'hodographe est donc

$$\Psi(x, y, x'_0, y'_0, x_0, y_0) = 0, \tag{11}$$

où nous avons supprimé les indices. Il y a deux cas à distinguer, ou bien cette dernière courbe coïncide avec la première, ce qui exige que l'équation (10) soit symétrique par rapport à x_0 et x'_0 ainsi que par rapport à y_0 et y'_0. Dans ce cas et pour la fonction particulière de f donnée, la trajectoire correspondant au système (1) est à elle-même sa courbe hodographe, quelles que soient les conditions initiales. Nous aurons donc, d'après le n° 2, l'équation de la polaire réciproque, en effectuant une rotation d'un angle droit de la courbe (10) ou (11) autour du centre du cercle directeur; cette équation est donc

$$(12) \qquad \Psi(-y, x, x'_0, y'_0, x_0, y_0) = 0.$$

Si les équations (10) et (11) sont distinctes, il suffit d'écrire que ces deux courbes coïncident, d'où l'on déduit les conditions auxquelles doivent satisfaire les données initiales. Supposons la fonction u du type (9), on remarque dans ce cas que l'équation (12) est aussi une solution du système (1). Si nous lançons le mobile d'après les formules de transformation (5) et (6) avec les conditions initiales x'_0, $-y'_0$, y_0, $-x_0$, l'intégrale générale du système (1) est la polaire réciproque correspondant à l'équation (10); cette équation est donc

$$(13) \qquad \Psi(x, y, x'_0, -y'_0, y_0, -x_0) = 0.$$

Il s'ensuit que les équations (12) et (13) ne sont pas distinctes, ce qu'on voit sans peine puisque la loi de la force est la même, et les conditions initiales qui font décrire ces courbes sont les mêmes. Sur les courbes (10) et (13) nous pouvons faire les mêmes hypothèses que sur les courbes (10) et (11). Les courbes (10) et (13) coïncident, et dans ce cas, pour la fonction f donnée, la trajectoire (10) est à elle-même sa polaire

réciproque, quelles que soient les conditions initiales; dans le cas contraire, on écrira comme précédemment que les courbes (10) et (13) coïncident, d'où l'on déduira les conditions auxquelles les données doivent satisfaire. Il peut cependant se faire que, pour une fonction particulière de f, on ne puisse pas déterminer des conditions initiales particulières, permettant d'amener la courbe (10) à coïncider par une rotation comme nous l'avons expliqué, avec sa courbe hodographe ou avec sa polaire réciproque; cela tient à ce fait que ces dernières courbes sont égales à la première, mais non superposables. En effet, on remarque que si la fonction u est du type (9), la symétrique de la courbe hodographe ou de la polaire réciproque, par rapport à l'axe polaire Ox, est aussi une solution du système (1).

4. Nous avons montré que toute solution du système (1) est une solution du problème, si la fonction u est du type (8) ou (9). Il nous reste à montrer qu'on a ainsi toutes les solutions. Il suffit pour cela de démontrer le théorème suivant :

Si, quelles que soient les conditions initiales, la trajectoire d'un point matériel est plane, et si elle est à elle-même (la courbe hodographe) sa polaire réciproque par rapport à un cercle, la force qui le sollicite passe par (l'origine de l'hodographe) le centre du cercle directeur.

En effet, prenons pour axe polaire la droite Ox, et pour pôle le centre du cercle directeur, et soient r et θ les coordonnées polaires d'un point M, α l'angle de la tangente à la trajectoire décrite par le point avec l'axe Ox, V l'angle de cette tangente avec le rayon

vecteur OM, enfin r_1 et α_1 les coordonnées polaires du pôle correspondant à la tangente en M par rapport au cercle directeur. On a, comme il est bien connu,

$$(1) \qquad r r_1 \sin V = C;$$

$\sqrt{C}$ est le nombre qui mesure le rayon du cercle directeur. La relation (1) peut s'écrire, en ayant égard à la relation $\operatorname{tang} V = r \frac{d\theta}{dr}$,

$$(2) \qquad r_1^2 = C^2 \left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right].$$

On sait que l'angle V se conserve par la transformation par polaire réciproque ; on aura donc par analogie

$$(3) \qquad r^2 = C^2 \left[\left(\frac{d\frac{1}{r_1}}{d\alpha_1} \right)^2 + \frac{1}{r_1^2} \right],$$

ou

$$(3') \qquad r^2 = C^2 \left[\left(\frac{d\frac{1}{r_1}}{d\alpha} \right)^2 + \frac{1}{r_1^2} \right].$$

Cette dernière relation correspond à la courbe obtenue par la rotation de la polaire réciproque d'un angle droit autour du point O. Différentions (2) et (3), nous aurons

$$(4) \qquad \frac{r_1\, dr_1}{dr} = -\frac{C^2}{r^2} \left(\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r} \right)$$

et

$$(5) \qquad \frac{r\, dr}{dr_1} = -\frac{C^2}{r_1^2} \left(\frac{d^2\frac{1}{r_1}}{d\alpha_1^2} + \frac{1}{r_1} \right);$$

il suffit de remplacer α_1 par α dans cette dernière formule pour avoir la différentielle de (3'). Remarquons

que si nous égalons $\frac{r_1 dr_1}{dr}$ à une fonction de r, θ, r_1, α_1 ou α, d'où l'on déduit $r\frac{dr}{dr_1}$ et qu'on porte dans (4) et (5) en ayant égard à (2) et (3), on aura l'équation différentielle de la trajectoire et de sa polaire réciproque; or, si les deux courbes coïncident, elles doivent satisfaire à une même équation différentielle; donc les deux équations différentielles (4) et (5) ne doivent différer que par le changement de r et θ en r_1 et α_1. Il s'ensuit par conséquent qu'on ne peut avoir que

$$r_1\frac{dr_1}{dr} = r\frac{f(r, \theta, r_1, \alpha_1)}{f(r_1, \alpha_1, r, \theta)},$$

où f est une fonction arbitraire. En portant cette dernière expression dans (4), on a

$$r\frac{f(r, \theta, r_1, \alpha_1)}{f(r_1, \alpha_1, r, \theta)} = -\frac{C^2}{r^2}\left(\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right),$$

qui est la formule de Binet de l'équation différentielle de la trajectoire, dans le cas d'une force centrale qu passe par l'origine des axes, c'est-à-dire le centre du cercle directeur.

5. *Application.* — Examinons les cas particuliers où f est une constante, et supposons la force attractive ; on a dans ce cas :

Exemple I.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -y,$$

avec les formules de transformation

$$x_1 = x', \qquad y_1 = y', \qquad \frac{dt_1}{dt} = -1.$$

L'intégrale générale est l'ellipse ayant pour équation

$$(b'x - by)^2 + (ay - a'x)^2 = (ab' - ba')^2,$$
$$ab' - ba' \neq 0,$$

où a, b, a', b' sont les constantes d'intégration; la constante des aires a pour valeur $C = ab' - ba'$. Il résulte, d'après ce qui précède, que pour avoir l'équation de la courbe hodographe, il faut exprimer les constantes en fonction des conditions initiales, et faire l'échange entre x_0 et x'_0 et y_0 et y'_0; or, par un calcul facile, on trouve que cela revient à changer dans l'équation précédente a en b et a' en b', et comme l'équation ne change pas, il résulte que l'ellipse précédente est à elle-même la courbe hodographe, quelles que soient les conditions initiales, l'origine de la courbe hodographe est le centre de cette ellipse; par conséquent, la polaire réciproque de cette ellipse s'obtiendra en la faisant tourner d'un angle droit autour de son centre. Le cercle directeur a pour centre le même point et pour rayon $\sqrt{ab' - ba'}$.

Exemple II. — Supposons la force répulsive; dans ce cas les équations du mouvement sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = y,$$

avec les formules de transformation

$$x_1 = x', \qquad y_1 = y', \qquad \frac{dt_1}{dt} = 1.$$

L'intégrale générale est l'hyperbole ayant pour équation

$$(b'x - by)(ay - a'x) = (ab' - ba')^2$$

et pour asymptotes les droites

$$b'x - by = 0, \qquad ay - a'x = 0;$$

la constante des aires est

$$C = ab' - ba'.$$

Si nous déterminons les constantes en fonction des conditions initiales, on trouve par un calcul facile

$$a = \frac{x_0 + x'_0}{2}, \qquad a' = \frac{y_0 + y'_0}{2},$$

$$b = \frac{x_0 - x'_0}{2}, \qquad b' = \frac{y_0 - y'_0}{2}.$$

En remplaçant dans l'équation précédente les constantes par leurs valeurs, et en effectuant l'échange entre x_0 et x'_0 et y_0 et y'_0, on trouve pour l'équation de la courbe hodographe

$$\left[\left(\frac{y'_0 - y_0}{2}\right)x - \left(\frac{x'_0 - x_0}{2}\right)y\right]\left[\left(\frac{x_0 + x'_0}{2}\right)y - \left(\frac{y + y'_0}{2}\right)x\right]$$
$$= \left[\frac{(x_0 + x'_0)(y'_0 - y_0) - (x'_0 - x_0)(y_0 + y'_0)}{4}\right]^2.$$

On remarque que cette courbe coïncide avec l'hyperbole conjuguée à la première. Si, comme nous l'avons expliqué, nous changeons dans cette dernière équation x en $-y$ et y en x, nous aurons l'équation de la polaire réciproque de la trajectoire. Ces deux courbes ne peuvent coïncider que si la trajectoire est une hyperbole équilatère, ce qui exige que les conditions initiales doivent satisfaire à la relation

$$v_0^2 = r_0^2,$$

v_0 étant la vitesse initiale et r_0 le rayon vecteur initial. Dans cet exemple, le centre de l'hyperbole est

le centre du cercle directeur qui a pour diamètre l'axe transverse de l'hyperbole.

Exemple III. — Supposons la force attractive, et la fonction $u = \frac{x'.y'}{x.y}$.

Les équations du mouvement sont

$$x'' = -\frac{x'.y'}{y},$$

$$y'' = -\frac{x'.y'}{x},$$

d'où

$$\frac{dx'}{x'} = -\frac{dy}{y},$$

$$\frac{dy'}{y'} = -\frac{dx}{x}.$$

En intégrant ces équations on a

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = \frac{a}{y}, \\ y' = \frac{b}{x}, \end{cases}$$

où a et b sont les constantes d'intégration. Les relations (1) nous donnent, en désignant par C la constante des aires,

$$yx' - xy' = a - b = C;$$

posons en particulier

$$a = mC, \qquad b = (m-1)C,$$

où m est nombre entier quelconque et positif. Les relations (1), en les divisant membre à membre, nous donnent,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(m-1)y}{mx}.$$

En intégrant cette équation, on a, après avoir déter-

miné la constante d'intégration,

$$y^m = \frac{y_0^m}{x_0^{m-1}} x^{m-1};$$

posons encore

$$\frac{y_0^m}{x_0^{m-1}} = (mp)^{m-1},$$

où p est une constante quelconque; on a, pour l'équation de la trajectoire, la courbe algébrique

$$y^m = (mp)^{m-1} x^{m-1}.$$

Cette courbe coïncide avec sa courbe hodographe, si les conditions initiales satisfont à la relation

$$\frac{y_0^m}{x_0^{m-1}} = \frac{y_0'^m}{x_0'^{m-1}}.$$

Nous aurons ensuite la polaire réciproque par une rotation d'un angle droit de cette dernière courbe autour du point O de rebroussement de la courbe. Le centre du cercle directeur est ce même point et le rayon a pour mesure

$$C = (-1)^{m-1} \frac{[m(m-1)p^2]^{m-1}}{m}.$$

Si en particulier nous supposons $m = 2$, on trouve pour trajectoire une parabole; le centre du cercle directeur est le sommet de la parabole; ce cercle est imaginaire et son rayon est $p\sqrt{-1}$, p étant le paramètre de la parabole. Dans le cas où $m = 3$, on trouve pour trajectoire une parabole semi-cubique.

Exemple IV. — Nous allons terminer par un dernier exemple. Supposons la force attractive et $u = \frac{v^2}{r^2}$, v étant la vitesse à l'instant considéré et r le rayon

vecteur. La loi de la force dans ce cas est

$$F = -r\frac{v^2}{r^2};$$

or, d'après Résal (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 90), on a

$$F = -\frac{rv^3}{C\rho},$$

où C est la constante des aires et ρ le rayon de courbure au point correspondant de la trajectoire. On a donc

$$(1) \qquad \rho = \frac{v^2 r^2}{C} = \frac{r^2}{p},$$

en ayant égard au théorème des aires, écrit sous la forme

$$pv = C,$$

où p est la distance du centre de la force à la tangente à la trajectoire. La formule (1) peut encore s'écrire

$$r\frac{dr}{dp} = \frac{r^2}{p},$$

d'où enfin

$$p = ar,$$

a étant la constante d'intégration. Si nous désignons par V l'angle de la tangente à la trajectoire avec le rayon vecteur, la relation précédente nous donne

$$\sin V = a.$$

Il s'ensuit par conséquent que la trajectoire est une spirale logarithmique ayant pour pôle le centre de la force; son équation est

$$r = r_0 e^{\pm \cot V(\theta - \theta_0)}.$$

Supposons que le mouvement sur la trajectoire a

lieu dans le sens de θ croissant; prenons pour sens positif sur la tangente, le sens du mouvement, et pour sens positif sur le rayon vecteur, le sens OM; l'angle V, qui figure dans l'équation précédente, est l'angle de ces deux directions positives. On remarque alors que l'angle de deux directions positives correspondant à la courbe hodographe est $\pi - V$, et par conséquent, d'après ce que nous avons dit au n° 3, l'équation de la courbe hodographe est

$$v = v_0 e^{\mp \cot V(\alpha - \alpha_0)}.$$

Il résulte donc que ces deux courbes sont égales, mais non superposables. Il suffit par conséquent de considérer la courbe symétrique de la précédente par rapport à l'axe Ox, pour l'amener ensuite par une rotation convenable à la faire coïncider avec la première courbe. Remarquons que le centre du cercle directeur est le pôle de la spirale.

[D4a]

SUR LES FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE NUL;

PAR M. G. VALIRON.

Je me propose dans ce travail de préciser la relation entre l'ordre de grandeur d'une fonction entière d'ordre nul et la distribution de ses zéros, principalement dans certains cas de croissance régulière.

1. Désignons par a_n le $n^{\text{ième}}$ zéro, et par r_n son

module : par hypothèse la série

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{r_n^k}$$

converge quel que soit le nombre positif k. Par suite, la quantité

$$\sigma_n = \frac{\log n}{\log r_n}$$

tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment. On peut alors trouver d'une infinité de façons [1] des fonctions $\rho(x)$, définies et continues pour $x > r_{n_0}$, et telles que :

1° $\rho(x)$ décroît (ou du moins ne croît pas), et $\lim_{x=\infty} \rho(x) = 0$;

$\rho(x) \log x$ croît (ou ne décroît pas), et croît indéfiniment.

2° $\sigma_n \leqq \rho(r_n)$, quel que soit $n > n_0$;

$\sigma_n = \rho(r_n)$, pour une infinité de valeurs de n.

$\rho(x)$ sera appelé *un exposant net de la suite des zéros;* on voit qu'on a, pour $n > n_0$,

$$n \leqq r_n^{\rho(r_n)}. \tag{1}$$

2. Ceci posé considérons le produit canonique

$$f(z) = \prod_{1} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right);$$

en désignant par r le module de z, on a évidemment

$$|f(z)| = \prod_{1}^{\infty} \left(1 + \frac{r}{r_n}\right).$$

---

[1] *Voir* mon article : *Sur les fonctions entières d'ordre nul* (*Mathematische Annalen*, B. 70, p. 47).

En définissant le nombre m par la double inégalité

$$(2) \qquad r_m \leqq r < r_{m+1},$$

nous avons, pour $n < m$,

$$1 + \frac{r}{r_n} < 2\frac{r}{r_n},$$

et par conséquent

$$|f(z)| < \frac{r^m}{r_1 r_2 \ldots r_m} 2^m \prod_{m+1}^{\infty}\left(1 + \frac{r}{r_n}\right).$$

D'autre part on a

$$1 + \frac{r}{r_n} < e^{\frac{r}{r_n}};$$

donc

$$\prod_{m+1}^{\infty}\left(1 + \frac{r}{r_n}\right) < e^{r\sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{r_n}}.$$

Soit alors $\rho(x)$ un exposant de la suite des zéros, nous aurons pour $n > m$:

$$\rho(r_n) < \rho(r_{m+1}) < \rho(r);$$

d'où

$$n \leqq r_n^{\rho(r_n)} < r_n^{\rho(r)},$$

et par suite

$$\frac{1}{r^n} < \frac{1}{n^{\frac{1}{\rho(r)}}};$$

posons enfin

$$M = \text{partie entière de } r^{\rho(r)},$$

on aura

$$\sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{r_n} = \sum_{m+1}^{M+1}\frac{1}{r_n} + \sum_{M+2}^{\infty}\frac{1}{r_n} < \frac{M-m}{r} + \sum_{M+2}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{\rho(r)}}}$$

$$< \frac{M-m}{r} + \int_{M+1}^{\infty}\frac{dx}{x^{\frac{1}{\rho(r)}}},$$

et comme

$$\int_{M+1}^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{1}{\rho(r)}}} = \frac{\rho(r)}{1-\rho(r)} \frac{M+1}{(M+1)^{\frac{1}{\rho(r)}}} < (1+\varepsilon)\frac{r^{\rho(r)}}{r}\rho(r) \quad (^1),$$

nous aurons

$$r\sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{r_n} < M - m + (1+\varepsilon)\rho(r)\, r^{\rho(r)} < (1+\varepsilon) r^{\rho(r)} - m.$$

Finalement nous obtenons

$$(3) \quad |f(z)| < \frac{r^m}{r_1 r_2 \ldots r_m} 2^m e^{(1+\varepsilon) r^{\rho(r)}} e^{-m} < \frac{r^m}{r_1 r_2 \ldots r_m} e^{1+\varepsilon) r^{\rho(r)}}.$$

L'inégalité (3) et le théorème bien connu de M. Jensen montrent que l'on a

$$(4) \qquad M(r) = \frac{r^m}{r_1 r_2 \ldots r_m} e^{\alpha r^{\rho(r)}} \qquad (0 < \alpha < 1+\varepsilon),$$

$M(r)$ désignant le maximum de $|f(z)|$ pour $z = r$.

3. Pour trouver une limite supérieure de $|f(z)|$ en fonction de l'exposant net, il reste à calculer une limite supérieure de l'expression

$$A = \frac{r^m}{r_1 r_2 \ldots r_m} = \frac{r^M}{r_1 r_2 \ldots r_m r^{M-m}},$$

M étant le nombre défini précédemment. Pour cela nous introduirons les nombres R_n définis par l'égalité

$$n = R_n^{\rho(R_n)}.$$

De cette définition résulte l'inégalité

$$R_n < r_n < r \qquad (n_0 < n \leq M);$$

---

(1) Dans tout ce qui suit je désignerai par ε toute quantité tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r_m}$, ou $\frac{1}{m}$.

d'où il suit

$$A < K \frac{r^M}{R_{n_0} R_{n_0+1} \ldots R_M} \qquad (K \text{ fini}),$$

ou encore

$$A < K r^M e^{-\sum_{n_0}^{M} \log R_n}.$$

Désignons pour un instant par $\varphi(x)$ la fonction inverse de $x^{\rho(x)}$; $\varphi(x)$ est une fonction croissante, telle que

$$\varphi(n) = R_n,$$

et par conséquent on a

$$\sum_{n_0}^{M} \log R_n = \int_{n_0}^{M+\theta} \log \varphi(x)\, dx + \theta' \log R_M \qquad (-1 < \theta' < 1).$$

en posant

$$M + \theta = r^{\rho(r)};$$

et en intégrant par parties

$$\int_{n_0}^{M+\theta} \log \varphi(x)\, dx = [x \log \varphi(x)]_{n_0}^{M+\theta} - \int_{n_0}^{M+\theta} \frac{x}{\varphi(x)} d[\varphi(x)].$$

En prenant $\varphi(x)$ pour variable dans la dernière intégrale, nous obtenons

$$\int_{n_0}^{M+\theta} \log \varphi(x)\, dx = (M+\theta) \log r - K_1 - \int_{r_0}^{r} \frac{x^{\rho(x)}}{x} dx$$
$$(K_1 \text{ fini}),$$

et ainsi

$$\sum_{n_0}^{M} \log R_n = M \log r + \theta \log r + \theta' \log R_M - K_1 - \int_{r_0}^{r} \frac{x^{\rho(x)}}{x} dx.$$

On aura donc

$$A < K e^{-\theta \log r - \theta' \log R_M + K_1 + \int_{r_0}^{r} \frac{x^{\rho(x)}}{x} dx}.$$

et comme

$$\frac{\log r}{\int_{r_0}^{r} \frac{x\rho(x)}{x}\,dx}$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$,

$$A < e^{(1+\varepsilon)\int_{r_0}^{r} \frac{x\rho(x)}{x}\,dx}.$$

Puisqu'enfin

$$\frac{r\rho(r)}{\int_{r_0}^{r} \frac{x\rho(x)}{x}\,dx}$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$ [car cette expression est inférieure à $\rho(r)$], l'inégalité (3) donnera

$$(5) \qquad |f(z)| < e^{(1+\varepsilon)\int_{r_0}^{r} \frac{x\rho(x)}{x}\,dx}.$$

4. On peut obtenir, en partant de l'égalité (4), une égalité assez précise dans certains cas. Soit $\varphi(x)$ une fonction continue, croissante (ou ne décroissant pas), et telle que

$$r_n = \varphi(n),$$

et soit $\psi(x)$ la fonction inverse (qui peut avoir des discontinuités brusques).

L'égalité (4) s'écrit

$$M(r) = r^m e^{-\sum_1^m \log \varphi(n)} e^{\alpha r \rho(r)}.$$

En opérant comme précédemment, on obtiendra

$$\sum_1^m \log \varphi(n) = m \log r + \theta \log r + \theta' \log r_m - K - \int_{r_0}^{r} \frac{\psi(x)}{x}\,dx$$

(K constant).

ou encore comme

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log r}{\int_{r_0}^{r} \frac{\psi(x)}{x} dx} = 0,$$

$$\sum_{1}^{m} \log \varphi(n) = m \log r - (1+\varepsilon) \int_{r_0}^{r} \frac{\psi(x)}{x} dx;$$

et par conséquent

$$(6) \quad \log M(r) = (1+\varepsilon) \int_{r_0}^{r} \frac{\psi(x)}{x} dx + \alpha r \rho^{r} \quad (0 < \alpha < 1+\varepsilon').$$

Cette égalité donnera une expression asymptotique de $\log M(r)$, lorsque le second terme du deuxième membre sera négligeable devant le premier. En particulier, si l'on a

$$n = (1+\varepsilon) r_n^{\theta(r_n)},$$

la fonction $\theta(x)$ satisfaisant aux premières conditions du paragraphe I, on aura

$$\log M(r) = (1+\varepsilon') \int_{r_0}^{r} \frac{x^{\theta(x)}}{x} dx.$$

Ceci montre que l'inégalité (5) est la plus précise que l'on puisse obtenir.

5. Il existe d'ailleurs une infinité de cercles $|z| = r$, sur lesquels le second membre de l'égalité (6) se réduit à son premier terme, et sur ces cercles on a

$$\log |f(z)| = (1+\varepsilon) \int_{r_0}^{r} \frac{\psi(x)}{x} dx.$$

En effet, en supposant $r \neq r_n$, on a

$$|f(z)| > \prod_{1}^{\infty} \left| 1 - \frac{r}{r_n} \right|;$$

posons toujours

$$r_m \leqq r < r_{m+1}$$

et

$$r_{m'} < \frac{r}{k} < r_{m'+1}; \qquad r_{m''} < k_1 r < r_{m''+1} \qquad (k_1 > 2),$$

on obtiendra facilement

$$|f(z)| > \prod_1^{\infty} \left| 1 - \frac{r}{r_n} \right| = \frac{r^m}{r_1 r_2 \ldots r_m} \prod_1^{m'} \left(\frac{r - r_n}{r} \right)$$
$$\times \prod_{m'+1}^{m} \left(\frac{r - r_n}{r} \right) \prod_{m+1}^{m''} \left(\frac{r_n - r}{r_n} \right)$$
$$\times \prod_{m''+1}^{\infty} \left(\frac{r_n - r}{r_n} \right).$$

Or

$$\prod_1^{m'} \frac{r - r_n}{r} > \left(1 - \frac{1}{k} \right)^{m'} > e^{-hm'} \qquad (h \text{ fini});$$

d'après la définition de m'',

$$\prod_{m''+1}^{\infty} \left(\frac{r_n - r}{r_n} \right) > e^{-2 \sum_{m''+1}^{\infty} \frac{r}{r_n}} > e^{-2 \sum_{m+1}^{\infty} \frac{r}{r_n}},$$

et, d'après le calcul du paragraphe 2,

$$\sum_{m+1}^{\infty} \frac{r}{r_n} < (1 + \varepsilon) r \rho(r) - m;$$

donc

$$\prod_{m''+1}^{\infty} \frac{r_n - r}{r_n} > e^{-2(1+\varepsilon) r \rho(r)}.$$

Enfin

$$\prod_{m'+1}^{m} \left(\frac{r - r_n}{r} \right) \prod_{m+1}^{m''} \left(\frac{r_n - r}{r_n} \right) > \prod_{m'+1}^{m''} | r - r_n | \frac{1}{(k_1 r)^{m''-m'}},$$

d'où

$$|f(z)| > \frac{r^m}{r_1 r_2 \ldots r_m} e^{-hm'} e^{-2(1+\varepsilon)r^{\xi(r)}} \frac{\prod_{m'+1}^{m''} |r - r_n|}{(k_1 r)^{m''-m'}},$$

ou

$$(7) \quad |f(z)| > \frac{r^m}{r_1 r_2 \ldots r_m} e^{-H_1 r^{\xi(r)}} \frac{\prod_{m'+1}^{m''} |r - r_n|}{(k_1 r)^{m''-m'}} \qquad (H_1 \text{ fini}).$$

Ceci posé, étant donné le nombre R, nous choisissons [1] r de la façon suivante, si n_R est le nombre des zéros compris entre les cercles de rayons R et KR ($K > 4$), nous tracerons les cercles de rayon $R + (K-1)R\frac{i}{\lambda n_R}$, $i = 1, 2, \ldots, \lambda n_R$, ($\lambda > 9$), et nous exclurons certaines des couronnes formées de la façon suivante : si une couronne contient q zéros, elle est exclue ainsi que les q précédentes et les q suivantes; si ces $2q$ couronnes contiennent r zéros, les r couronnes précédentes et suivantes sont exclues, etc. Comme il reste au moins $6n_R$ couronnes, on peut trouver un cercle pour lequel $\frac{r}{k} = R$, $k_1 r = KR$.

Nous aurons alors

$$|r_{m+i+1} - r| > (K-1)\frac{k_1 r}{K}\frac{i}{\lambda n_R},$$

$$|r_{m-i} - r| > (K-1)\frac{k_1 r}{K}\frac{i}{\lambda n_R};$$

d'où

$$\prod_{m'+1}^{m''} |r - r_n| > \left[\frac{(K-1)k_1 r}{\lambda K}\right]^{m''-m'} \frac{\left[\left(\frac{n_R}{2}\right)!\right]^2}{n_R^{n_R}}$$

$$(\text{car } n_R = m'' - m')$$

---

[1] Procédé indiqué par M. Boutroux dans sa Thèse.

et

$$\frac{\prod^{m''} |r - r_n|}{(k_1 r)^{m''-m'}} > \left(\frac{K-1}{\lambda K}\right)^{m''-m'} e^{-\lambda' n_R} > e^{-H_2(m''-m')}$$

(λ' et H_2 finis).

mais puisque

$$m'' \leqq r_{m''}^{\rho(r_{m''})} < (k_1 r)^{\rho(r)} < (1+\varepsilon) r^{\rho(r)}.$$

l'inégalité (7) devient

$$(8) \quad |f(z)| > \frac{r^m}{r_1 r_2 \ldots r_m} e^{-Hr^{\rho(r)}} = e^{(1+\varepsilon)\int_{r_0}^{r} \frac{\psi(x)}{x} dx - Hr^{\rho(r)}}$$

(H fini).

En comparant avec les égalités (6) et (4), on voit que dans les couronnes considérées, on a

$$(9) \quad |f(z)| = \frac{r^m}{r_1 r_2 \ldots r_m} e^{+Ar^{\rho(r)}} = e^{(1+\varepsilon)\int_{r_0}^{r} \frac{\psi(x)}{x} dx + Ar^{\rho(r)}}$$

(A fini).

Il reste à montrer que l'on peut déterminer R de façon que les seconds membres se réduisent à leur premier terme. Soit N un nombre tel que

$$N = r_N^{\rho(r_N)};$$

d'après le paragraphe 1, il existe une infinité de ces nombres ; nous prendrons

$$R = r_N^{1+\frac{\alpha}{\rho(r_N)\log r_N}} = r_N e^{\frac{\alpha}{\rho(r_N)}} \qquad (\alpha \text{ fini}).$$

Nous aurons ainsi

$$r^{\rho(r)} = (kR)^{\rho(kR)} < (kR)^{\rho(r_N)} < (1+\varepsilon) r_N^{\rho(r_N)} e^{\alpha},$$

et d'autre part

$$\frac{r^m}{r_1 r_2 \ldots r_m} > \frac{r^N}{r_1 r_2 \ldots r_N} > \left(\frac{r}{r_N}\right)^N > e^{\frac{\alpha}{\rho(r_N)}} r_N^{\rho(r_N)};$$

il suit bien de là l'égalité

$$e^{r^{\varepsilon(r)}} = \left(\frac{r^m}{r_1 r_2 \ldots r_m}\right)^{\varepsilon}$$

sur les cercles considérés et par suite l'égalité annoncée

$$(10) \qquad |f(z)| = \left(\frac{r^m}{r_1 r_2 \ldots r_m}\right)^{1+\varepsilon} = e^{(1+\varepsilon')\int_{r_0}^{r} \frac{\psi(x)}{x} dx},$$

valable sur une infinité de cercles [1].

6. Il résulte de ce qui précède que l'on doit prendre pour limite supérieure du maximum $M(r)$ du module de $f(z)$ pour $|z| = r$, une expression de la forme

$$e^{\int_{r_0}^{r} \frac{\mu(x)}{x} dx},$$

où $\mu(x)$ est une fonction croissante de x, mais croissant moins vite que x^{ε}, $\varepsilon > 0$. Nous dirons qu'une fonction d'ordre nul est *parfaitement régulière* lorsqu'on a

$$(11) \qquad M(r) = e^{(1+\varepsilon)\int_{r_0}^{r} \frac{\mu(x)}{x} dx},$$

la fonction $\mu(x)$ satisfaisant à certaines conditions. Si l'on pose

$$(12) \qquad \int_{r_0}^{r} \frac{\mu(x)}{x} dx = r^{\nu(r)} \log r,$$

on constate aisément que la fonction $\nu(r) \log r$ est croissante; d'autre part $\nu(r)$ doit tendre vers zéro, nous supposerons que $\mu(x)$ est telle que la fonction $\nu(x)$ décroît constamment (ou du moins ne croît pas).

Cette hypothèse faite, il résulte du théorème de

---

[1] Ce théorème est une précision de celui que j'avais démontré dans les *Mathematische Annalen* (théorème de M. Wiman).

Jensen l'inégalité

$$\left(\frac{r}{r_n}\right)^n < e^{(1+\varepsilon)r^{\nu(r)}} \log r,$$

d'où

$$n < \frac{(1+\varepsilon)r^{\nu(r)}\log r}{\log r - \log r_n},$$

valable quels que soient r et n, en prenant

$$r = r_n^{1+\frac{1}{\nu(r_n)\log r_n}},$$

on aura

$$n < (1+\varepsilon)\nu(r_n)\log r_n \,.\, e r_n^{\nu(r_n)},$$

et comme le second membre de cette inégalité est une fonction croissante et que son logarithme divisé par $\log r_n$ décroît, il existe *un exposant net* $\rho(x)$ de la suite des zéros tel que

$$x^{\rho(x)} < (1+\varepsilon)\nu(x)\log x \,.\, e x^{\nu(x)}.$$

En appliquant l'égalité (6) on obtiendra alors

$$(1+\varepsilon)\int_{r_0}^{r}\frac{\psi(x)}{x}dx + \alpha\nu(r)\log re \,.\, r^{\nu(r)} = (1+\varepsilon_1)r^{\nu(r)}\log r,$$

ou encore comme $\nu(x)$ tend vers zéro, et d'après l'égalité (12),

$$(13)\qquad \int_{r_0}^{r}\frac{\psi(x)}{x}dx = (1+\varepsilon_2)\int_{r_0}^{r}\frac{\mu(x)}{x}dx;$$

cette égalité donne le nombre des zéros contenus dans le cercle de rayon r puisque ce nombre n est égal à la partie entière de $\psi(r)$. Tout revient à calculer une valeur approchée de $\psi(r)$. Or de l'égalité (13) on déduit

$$\int_{r}^{r'}\frac{\psi(x)}{x}dx = (1+\varepsilon_2)\int_{r}^{r'}\frac{\mu(x)}{x}dx + \varepsilon_3\int_{r}^{r'}\frac{\mu(x)}{x}dx,$$

ε_2 et ε_3 tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$. Déterminons r' par la condition

$$(14) \qquad \int_r^{r'} \frac{\mu(x)}{x}\,dx = \sqrt{\varepsilon}\int_{r_0}^{r} \frac{\mu(x)}{x}\,dx.$$

et prenons r assez grand pour que $\varepsilon_3 < \varepsilon$; on aura

$$\int_r^{r'} \frac{\psi(x)}{x}\,dx = (1+\varepsilon_4)\int_r^{r'} \frac{\mu(x)}{x}\,dx,$$

de sorte que $\psi(x)$ est égal à $(1+\varepsilon)\,\mu(x)$ pour une valeur au moins de x comprise entre r et r', et par suite si l'on a

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\mu(r')}{\mu(r)} = 1.$$

on aura

$$n = \psi(r) = (1+\varepsilon)\,\mu(r).$$

C'est-à-dire que de l'égalité (11) on déduit l'égalité

$$n = \mu(r_n)(1+\varepsilon).$$

Les conditions imposées à $\mu(x)$ sont les suivantes :

1° *La fonction* $\nu(r)$ *définie par l'égalité* (12) *est décroissante.*

2° *De l'égalité*

$$\int_0^{r'} \frac{\mu(x)}{x}\,dx = (1+\varepsilon)\int_0^{r} \frac{\mu(x)}{x}\,dx,$$

on déduit

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\mu(r')}{\mu(r)} = 1.$$

Cette deuxième condition s'obtient en modifiant l'égalité (14); elle est vérifiée toutes les fois qu'on a

$$\int_0^{r} \frac{\mu(x)}{x}\,dx = \mu(x)\,\chi(x)(1+\varepsilon),$$

$\chi(x)$ *étant une fonction croissante.*

En prenant par exemple pour valeur de $\log M(r)$ à $(1+\varepsilon)$ près,

1° $\log r\, e^{A(\log_k r)^\alpha}$ $(k \geqq 3)$;

2° $(\log r)^{1+\alpha}$;

3° $\log r\, e^{A(\log_2 r)^\alpha}$ $(\alpha > 1)$;

4° $r^{\frac{A}{\log_k r}}$ $(k \geqq 2)$,

on obtiendra pour valeurs de $\nu(r)$ des fonctions décroissantes; d'autre part on aura pour $\mu(x)$ les valeurs suivantes :

1° $e^{A(\log_k r)^\alpha}\left[1 + \frac{A\alpha(\log_k r)^{\alpha-1}}{\log_{k-1} r \ldots \log_2 r}\right] = (1+\varepsilon)e^{A(\log_k r)^\alpha}$;

2° $(1+\alpha)(\log r)^\alpha$;

3° $e^{A(\log_2 r)^\alpha}[1 + A\alpha(\log_2 r)^{\alpha-1}] = (1+\varepsilon)A\alpha(\log_2 r)^{\alpha-1} e^{A(\log_2 r)^\alpha}$;

4° $r^{\frac{A}{\log_k r}} \frac{A}{\log_k r}(1+\varepsilon)$.

La remarque précédente s'applique, et, d'après les résultats du paragraphe 4, on obtient les égalités réciproques :

$$\log M(r) = (1+\varepsilon)\log r\, e^{A(\log_k r)^\alpha},$$
$$n = (1+\varepsilon')e^{A(\log_k r)^\alpha} \qquad (k \geqq 3);$$

$$\log M(r) = (1+\varepsilon)(\log r)^{1+\alpha},$$
$$n = (1+\varepsilon')(\log r)^\alpha(1+\alpha);$$

$$\log M(r) = (1+\varepsilon)\log r\, e^{A(\log_2 r)^\alpha},$$
$$n = (1+\varepsilon')A\alpha(\log_2 r)^{\alpha-1} e^{A(\log_2 r)^\alpha} \qquad (\alpha > 1);$$

$$\log M(r) = (1+\varepsilon)r^{\frac{A}{\log_k r}},$$
$$n = (1+\varepsilon')\frac{A r^{\frac{A}{\log_k r}}}{\log_k r}.$$

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Lille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Problèmes.* — I. *Dans un plan rapporté à deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *trouver les courbes telles que la sous-tangente soit égale à* $2y - \frac{x^2}{2y}$, x *et* y *désignant les coordonnées du point de contact.*

II. 1. *Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, Oz *et la surface* (Σ) *dont l'équation est*

$$x^2(x^2+y^2+z^2) - a^2y^2 = 0;$$

indiquer la forme des sections de (Σ) *par des plans parallèles aux plans de coordonnées.*

2. *Construire en particulier l'intersection* (Γ) *de* (Σ) *et du plan* xOy, *calculer l'aire de la région du plan limitée par* (Γ) *et l'une de ses asymptotes.*

3. *Calculer le volume de la portion de l'espace limitée par* (Σ) *et par le cylindre*

$$x^2 + y^2 - ay = 0.$$

Question de cours. — Mouvement d'un point matériel sur une courbe plane fixe sous l'action d'une force située dans le plan de la courbe; projections du mouvement sur les axes; équations intrinsèques (projections sur la normale et la tangente).

Application au pendule simple (donner seulement les équations du mouvement).

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *On considère la courbe* (Γ) *qui, rapportée à deux axes rectangulaires, a pour équation*

$$(\Gamma)\, x^3 - a(x^2 - 3y^2) = 0.$$

Soit (C) *le cercle de courbure au point* $A\,(x = a, y = 0)$.

Soit (C′) *le cercle qui a pour équation*

$$27(x^2+y^2)-41ax+14a^2=0.$$

Tracer le contour ABCD *situé au-dessus de* Ox *et limité par un arc de la courbe* (Γ), *un arc du cercle* (C′) *l'axe des* x *et un arc du cercle* (C).

Calculer l'aire de la portion du plan limitée par ce contour et le périmètre de ce contour.

II. *Moment d'inertie d'un solide homogène limité par deux cylindres de rayons* R *et* r' *de même axe et de hauteur commune* h :

1° *Par rapport à l'axe de révolution;*

2° *Par rapport à une génératrice du petit cylindre;*

3° *Par rapport à une génératrice du grand cylindre.*

(Juillet 1910.)

Epreuve pratique. — *Problèmes.* — I. 1. *Dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, *trouver une courbe telle que l'ordonnée à l'origine de la tangente en un point* M *soit égale à* $\frac{y^2}{2\sqrt{ax}}$; x *et* y *désignent les coordonnées du point* M, a *représente une longueur donnée.*

2. *L'une de ces courbes a pour équation*

$$xy^2=a(x+y)^2;$$

construire cette courbe.

3. *Calculer l'aire du trapèze curviligne limité par un arc de la courbe précédente, les parallèles à* Oy *menées par l'extrémité de cet arc et l'axe* Ox.

II. Ox, Oy, Oz *étant trois axes de coordonnées rectangulaires et* a *une longueur donnée, calculer l'aire de la portion de la surface*

$$2az=x^2+y^2$$

qui se projette orthogonalement sur xOy *à l'intérieur de la courbe*

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2).$$

Question de cours. — Mouvement d'un solide autour d'un axe fixe. Pendule composé.

Épreuve pratique. — I. 1° *Résoudre l'équation*

$$f(x) = x^6 - 8x^5 + 25x^4 - 38x^3 + 28x^2 - 8x = 0,$$

sachant que les racines sont commensurables;

2° *Décomposer en fractions simples la fraction*

$$\frac{f(x)}{f(x)};$$

3° *Tracer la courbe* $y = F(x)$ *quand* x *varie de* $+2$ *à* $+\infty$.

Calculer l'aire limitée par cette courbe, l'axe des x *et les droites* $x = 3$, $x = 4$.

II. *Par rapport à un système d'axes fixes* OX, OY *et à certain instant, un système* ωx, ωy *est défini de la façon suivante : les coordonnées de* ω *sont* 1, 2 *et l'angle* $(\omega x, OX) = 30°$, *le point* ω *est animé d'une translation parallèle à* OX *de grandeur* 3 *et les axes* ωx, ωy *ont une vitesse angulaire de rotation autour de* ω *égale à* 2. *Le point situé sur* ωx *et d'abscisse* $+1$ *est le centre d'une rotation de vitesse angulaire* 1. *Trouver le centre instantané du mouvement résultant.*

(Novembre 1910.)

Épreuve théorique. — *Question de cours. — Étudier les différents points d'un corps solide dans un mouvement de rotation autour d'un axe fixe.*

Donner leur expression analytique en supposant que l'axe de rotation passe par l'origine et que le vecteur rotation a pour projections p, q, r.

Problèmes. — I. *Construire la courbe plane* (C) *représentée dans un système de coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$x^2(x^2 + y^2) + 4ax^2y - 2a^2x^2 + 3a^2y^2 - 4a^3y + a^4 = 0,$$

où a *désigne une longueur donnée; trouver le lieu du*

milieu des cordes de (C) *parallèles à l'axe des ordonnées. Calculer l'aire de la région du plan limitée par* (C).

II. *Dans un plan rapporté à un pôle* O *et à un axe polaire* Ox, *construire la courbe* (Γ) *représentée par l'équation*

$$\rho = 4a\cos\omega - \frac{a}{\cos\omega},$$

où ω *et* ρ *ont leur signification ordinaire, a représentant une longueur donnée.*

Montrer qu'il existe sur Ox *un point* I *tel que la droite* IM *qui le joint à un point quelconque* M *de* (Γ) *fasse avec* Ox *un angle triple de l'angle* (Ox, OM).

Trouver les trajectoires orthogonales des courbes (Γ) *quand a varie.*

La courbe (Γ) *présente une boucle, calculer l'aire de la portion de la sphère de centre* O *et de rayon* $3a$ *qui se projette à l'intérieur de cette boucle.*

Épreuve pratique. — I. *On donne deux axes rectangulaires et les courbes*

$$(A)\quad y = \frac{1}{2}\sqrt{4x - x^2},$$

$$(B)\quad y = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 2}.$$

Construire la portion OP *de* (A) *pour* $0 \leqq x \leqq 1$ *et la portion* PQ *de* (B) *pour* $1 \leqq x \leqq 2$, *trouver les tangentes de ces courbes au point commun, calculer les rayons de courbure. Calculer l'aire de la surface de révolution engendrée par l'arc* OP *en tournant autour de* Ox *et l'aire plane limitée par l'arc* PQ, *l'axe des* x *et les parallèles à* Oy *menées par* P *et* Q.

II. *Deux points pesants se meuvent sur une droite verticale, le premier passe en* O *au temps* $t = 0$ *avec une vitesse* v_1, *le deuxième passe en* O *au temps* θ *avec une vitesse* v_2.

On demande l'instant où les deux mobiles se rencontrent, leur position et leurs vitesses à cet instant; discuter les signes de ces quantités (on supposera $\theta > 0$).

Déterminer θ de façon que la rencontre n'ait pas lieu et trouver dans ce cas la distance des deux mobiles.

(Juillet 1911.)

Lyon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° *Vérifier que la courbe représentée, en coordonnées rectangulaires planes, par les équations*

$$x = (1 + t)e^t, \qquad y = t^2 e^t \tag{1}$$

satisfait à l'équation différentielle

$$x\,dy^2 - y\,dx\,dy - y\,dx^2 = 0. \tag{2}$$

2° *Soient* M *un point de la courbe considérée,* T *le point où la tangente en* M *rencontre l'axe* Ox, P *la projection de* M *sur* Ox, *et* K *la projection de* P *sur* MT. *Montrer qu'il résulte de l'équation* (2) *que la longueur* TK *est égale à la distance de l'origine* O *à la tangente* MT.

3° *Intégrer l'équation différentielle* (2).

II. 1° *Connaissant le mouvement absolu d'un point libre* M, *et celui d'un système* Z *de forme invariable, en déduire la vitesse relative de* M *par rapport à* Z ;

2° *Déduire du principe des vitesses virtuelles les conditions d'équilibre d'un corps solide libre soumis à des forces données.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Étant donnée la série*

$$f(x) = \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{3.4} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} + \ldots$$

1° *Dire quel est son intervalle de convergence ;*

2° *Pour* $x = \frac{1}{2}$, *calculer la somme d'un nombre suffisant de termes, de manière à obtenir* $f\left(\frac{1}{2}\right)$ *à moins de* 0.001 ;

3° *Trouver, sous forme finie, l'expression de* $f'(x)$; *en déduire celle de* $f(x)$;

4° *Le service de l'expression obtenue pour contrôler la valeur précédemment trouvée par* $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

(Juillet 1910.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *On donne un système d'axes rectangulaires* $Oxyz$, *dont l'axe* Oz *est vertical, et la surface* S *représentée par les équations*

$$x = v, \qquad y = mv \sin u, \qquad z = a \cos u,$$

où a, m *sont des constantes données et* u, v *des paramètres variables.*

1° *Montrer que la surface* S *est engendrée par une droite horizontale mobile qui s'appuie sur une droite et un cercle fixes;* 2° *On imagine un point* M *qui se déplace sur la surface* S, *de manière qu'on ait*

$$u = t, \qquad v = f(t):$$

et l'on demande de déterminer la fonction $f(u)$ *de manière que l'accélération de* M *soit constamment tangente en* M *à la surface* S; 3° *Calculer le volume compris à l'intérieur de la surface* S *et entre les deux plans* $x = a$, $x = 2a$.

II. *Étudier, au point de vue cinématique, le mouvemen le plus général d'un corps solide.*

III. *Un point matériel pesant, partant du repos, est astreint à rester sur une droite inclinée d'un angle* α *sur l'horizon, le long de laquelle il peut glisser sans frottement. On demande quel doit être cet angle* α *pour que la projection sur l'horizontale du chemin parcouru dans un temps donné soit maxima.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Démontrer que l'équation*

$$x^4 - 2x^3 + x - 1 = 0$$

a deux racines réelles et deux seulement; et calculer ces racines à 0,01 *près.*

Nota. *On pourra employer des méthodes graphiques, en se servant de papier quadrillé au millimètre. On remar-*

quera que la dérivée de l'équation donnée a une racine rationnelle. (Novembre 1910.)

Épreuve théorique. — I. *Construire la courbe* C *définie par les équations*

$$x = te^t, \qquad y = (t+1)e^t.$$

II. *Vérifier que les coordonnées* (x, y) *d'un point de cette courbe satisfont à l'équation différentielle*

$$x\,dy + y\,dx = 2y\,dx. \tag{1}$$

III. *Soient* M *un point de la courbe considérée,* S *le point où la normale en* M *rencontre* OX, P *la projection de* M *sur* OX, *montrer qu'il résulte de* (1) *que*

$$\mathrm{OS} = 2\,\mathrm{PM}.$$

IV. *Intégrer l'équation différentielle*

$$(x^2 - 4y^2)\,dx^2 + 2xy\,dx\,dy + y^2\,dy^2 = 0.$$

Épreuve pratique. — 1. *Volume compris entre le plan* $x = 0$, *le plan* $z = 0$, *le cylindre* $y^2 + x = 1$, *et le paraboloïde* $z = x^2 + y^2$.

2. *Calculer à* $\frac{1}{100}$ *près la plus grande racine de l'équation* $x\log_{10}x + \frac{1}{10} = 0$. (Juillet 1911.)

Marseille.

Épreuve théorique. — *Construire la courbe représentée en coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$x^4 y - x^2 + y = 0.$$

Trouver la position des points d'inflexion.

Calculer le rayon de courbure en chaque point où y *est maximum ou minimum.*

Signification et calcul de l'intégrale définie

$$\int_{-h}^{+h} \frac{x^2\,dx}{1+x^4}.$$

Cette intégrale a pour valeur limite

$$\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{\sin\frac{3\pi}{4}}$$

quand h augmente indéfiniment.

Épreuve pratique. — *Une balle est lancée au point* A *avec une vitesse initiale de* 20 m : s *sous un angle de* 41° *avec l'horizon.*

La balle vient frapper le plan horizontal du point de départ en B; *elle rebondit et décrit une nouvelle parabole avec une nouvelle vitesse initiale et un nouvel angle de départ. Elle frappe de nouveau le sol en* C *et ainsi de suite.*

On admet que chaque fois que la balle rebondit sur le sol, la composante horizontale de la vitesse au départ est égale à la composante horizontale à l'arrivée au sol, mais que la composante verticale de la vitesse au départ n'est que les $\frac{2}{3}$ *de la composante verticale à l'arrivée au sol.*

On assimile la balle à un point et l'on néglige naturellement la résistance de l'air.

On demande de calculer :

1° *La distance du point de départ initial à la position limite de la balle;*

2° *La durée totale de ce trajet;*

3° *Le nombre minimum de ricochets que peut faire la balle convenablement lancée pour atteindre une portée de* 100^{m} *et l'angle de départ sous lequel on doit la lancer pour qu'elle atteigne effectivement cette portée dans ce nombre minimum de bonds.* (Juin 1910.)

Épreuve théorique. — 1° *Déterminer les droites et les variétés de coniques qu'on peut placer sur la surface dont l'équation est*

$$xy = 2z.$$

2° *On considère l'équation différentielle*

$$\frac{dx^2}{dt^2} + n^2x = n^2\lambda \sin qt,$$

où x représente l'abscisse d'un point mobile sur une droite, t le temps et n, λ et q des constantes positives.

Intégrer cette équation de sorte que la partie de l'intégrale qui provient de l'équation privée de son second membre soit nulle ainsi que sa dérivée pour $t = 0$.

Discuter la nature du mouvement défini par l'intégrale obtenue suivant les valeurs du rapport $\frac{q^2}{n^2}$.

Examiner le cas où l'on a $q^2 = n^2$.

Indiquer des problèmes de dynamique régis par l'équation différentielle.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Les racines de l'équation*

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - 1 = 0$$

sont séparées par les nombres

$$-1, +0, +1, +\infty.$$

Calculer, à 0,001 près, la racine comprise entre 0 et 1.

2° *Un plan horizontal monte d'un mouvement uniformément accéléré avec une accélération de $3^{m},5$ par seconde dirigée suivant la verticale.*

Un poids de 60^{kg} est placé sur ce plan.

Calculer la pression entre le poids et le plan.

Faire le même calcul dans le cas de la descente du plan.

SOLUTION.

1° *Portée totale :*

$$\frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g} \frac{1}{1-\lambda} = 121^{m},$$

$$\lambda = \frac{2}{3}, \qquad v_0 = 20, \qquad \alpha_0 = 41^0;$$

2° *Durée du trajet :*

$$\frac{2 v_0 \sin \alpha_0}{g} \frac{1}{1-\lambda} = 8^{s},03;$$

3° On a

$$\frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g} \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda} \text{ pour } n \text{ bonds.}$$

Donc

$$\frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g} \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda} = 100,$$

d'où

$$\sin 2\alpha_0 = \frac{100\, g(1-\lambda)}{v_0^2 (1-\lambda^n)};$$

donc

$$100\, g(1-\lambda) < v_0^2 (1-\lambda^n),$$

d'où

$$\lambda^n < 1 - \frac{100\, g(1-\lambda)}{v_0^2}.$$

De là

$$n > \frac{\log 12 - \log 2,20}{\log 3 - \log 2} \text{ ou } n > 1,1841.$$

Donc

$$n = 5.$$

On trouve ensuite $2\alpha_0 = 70^\circ 8'$ ou $\alpha_0 = 35^\circ 4'$.

(Octobre 1910.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2163.

(1910, p. 179.)

Étant donnés un tétraèdre et une droite, si les coordonnées de la droite rapportées au tétraèdre sont p, q, r, s, t, u, il existe deux systèmes de quatre droites ayant pour coordonnées :

(d)	p	q	r	s	t	u
(a)	$-p$	q	r	$-s$	t	u
(b)	p	$-q$	r	s	$-t$	u
(c)	p	q	$-r$	s	t	$-u$
(δ)	p	q	r	$-s$	$-t$	$-u$
(α)	$-p$	q	r	s	$-t$	u
(β)	p	$-q$	r	$-s$	t	$-u$
(γ)	p	q	$-r$	$-s$	$-t$	u.

Chacune des droites du premier système rencontre chacune des droites du second système, et les rapports anharmoniques des deux systèmes sont égaux; on a, par exemple,

$$(d, a, b, c) = (\delta, \alpha, \beta, \gamma) = -\frac{qt}{ru}.$$

Réciproquement, si deux systèmes de quatre droites sont tels que chaque droite du premier système rencontre chaque droite du second système, les rapports anharmoniques des deux systèmes étant égaux, ces deux systèmes dérivent d'un tétraèdre de la manière indiquée ci-dessus.

(G. Fontené.)

SOLUTION,

Par M. R. Bouvaist.

Soit ABCD le tétraèdre donné, et soient m, n, p, q les points d'intersection d'une droite (d) avec les faces BCD, ACD, ABD, ABC de celui-ci : il existe une quadrique Σ et une seule conjuguée au tétraèdre ABCD et passant par d. Soit Σ' une quadrique conjuguée à ABCD et tangente à d. Le plan Ad coupe Σ et Σ' suivant deux coniques bitangentes; or, il coupe Σ suivant deux génératrices d et δ, la génératrice δ est donc tangente à Σ', elle rencontre, de plus, d dans le plan polaire de A, c'est-à-dire en m. Les plans Bd, Cd, Dd nous donneront, de même, les génératrices α, β, γ, tangentes à Σ' et rencontrant d en n, p, q. Les plans Bδ, Cδ, Dδ donneront de même les génératrices a, b, c du système d rencontrant δ en ses points n', p', q' d'intersection avec les droites An, Ap, Aq, et l'on aura évidemment

$$(d, a, b, c) = \mathrm{A}(m, n, p, q) = (\delta, \alpha, \beta, \gamma).$$

Réciproquement, soient deux systèmes de quatre droites d, a, b, c, δ, α, β, γ, tels que chaque droite du premier système rencontre chaque droite du second système, les rapports anharmoniques des deux systèmes étant égaux. Soient m le point d'intersection de d et δ; n, p, q les points d'intersection de d avec α, β, γ; n', p', q' les points d'intersection de δ avec a, b, c: puisque

$$(mnpq) = (mn'p'q'),$$

les droites nn', pp', qq' sont concourantes en un point A. Les droites d et α, d et β, d et γ nous donneront de même les points B, C, D.

La construction de ces points montre qu'ils sont respectivement sur les droites d'intersection des plans $d\alpha$ et δa, $d\beta$ et δb, $d\gamma$ et δc. Or, par suite de l'égalité du rapport anharmonique des deux systèmes de quatre droites, ces plans se correspondent homographiquement et le plan $d\delta$ est à lui-même son homologue; il en résulte que le plan BCD passe par m contacts du plan tangent $d\delta$ mené par A à la quadrique Σ contenant les huit droites données; ce plan BCD contient de même les contacts de Σ avec les plans $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ passant par A. A est donc le pôle de BCD par rapport à Σ. D'où l'on peut conclure que le tétraèdre ABCD est conjugué à Σ, et nous retombons sur la définition donnée plus haut des systèmes de droites considérés.

2164.

(1910, p. 480.)

Les quadriques Σ' en nombre doublement infini, qui sont conjuguées par rapport à un tétraèdre donné, et qui sont tangentes à une droite donnée d sont tangentes à deux systèmes de quatre droites (d, a, b, c) et $(\delta, \alpha, \beta, \gamma)$; l'une de ces quadriques Σ_0 contient les huit droites. Les quadriques du faisceau ponctuel défini par la quadrique Σ_0 et l'une des quadriques du système font partie du système; il en est de même des quadriques du faisceau tangentiel défini par la quadrique Σ_0 et l'une des quadriques du système; les faisceaux ponctuels sont en nombre simplement infini; il en est de même des faisceaux tangentiels et chaque quadrique Σ est déterminée par le faisceau ponctuel et par le faisceau tangentiel dont elle fait partie. L'enveloppe des plans polaires d'un point P par rapport aux quadriques Σ est une conique dont le plan est le plan polaire du point P par rapport à la quadrique Σ_0 et qui est inscrite au tétraèdre; le lieu des pôles d'un plan p par rapport aux quadriques Σ est un cône dont le sommet est le pôle du plan p par rapport à la quadrique Σ_0 et qui est circonscrit au tétraèdre. (G. Fontené.)

SOLUTION,

Par M. R. Bouvaist.

Soient ABCD le tétraèdre donné, Σ_0 la quadrique conjuguée à ABCD, et passant par d, le plan Ad coupe Σ_0 suivant deux génératrices d et δ et une quadrique Σ' suivant une conique Γ tangente à d; de plus, A a même polaire par rapport à $d\delta$ et à Γ; il en résulte que δ est tangente à Γ. Les plans Bd, Cd, Dd, Bδ, Cδ, Dδ nous donnent de même des droites a, b, c, α, β, γ tangentes à Σ' et situées sur Σ_0. Les huit droites ainsi obtenues sont visiblement des tangentes à la biquadratique commune à Σ_0 et Σ', et sont de même des génératrices de la développable circonscrite à ces deux surfaces. Les faisceaux ponctuels et tangentiels en nombre simplement infini déterminés par Σ_0 et une quadrique Σ' ne contiennent par suite que des quadriques du système Σ'. Particulariser le faisceau ponctuel auquel appartient une quadrique Σ, revient à donner le point où cette surface touche d, et particulariser le faisceau tangentiel auquel appartient Σ', c'est se donner le plan tangent à cette surface suivant d; la donnée de ces deux faisceaux détermine par conséquent complètement Σ.

Les quadriques Σ tangentes à d au même point α forment un faisceau ponctuel, les plans polaires d'un point P relatifs à ces quadriques passent donc par une droite fixe D, située dans le plan polaire de P par rapport à Σ_0, puisque Σ_0 est l'une des quadriques Σ. Cherchons, lorsque α décrit d, l'enveloppe de ces droites D dans le plan polaire de P par rapport à Σ_0. Parmi les quadriques Σ tangentes à d en α, il en est une qui passe par P, le plan π tangent à cette quadrique en P passe par la droite D. Soit Δ une droite quelconque passant par P : les quadriques conjuguées à ABCD et tangentes à Δ en P forment un faisceau ponctuel; deux d'entre elles sont tangentes à d; il y a, par suite, deux plans π passant par une droite Δ et ces plans enveloppent un cône du second ordre, et les droites L enveloppent la conique section de ce cône par le plan polaire de P par rapport à Σ_0. Cette conique est d'ailleurs tangente aux faces du tétraèdre ABCD, puisque ces faces sont les plans polaires de P par rapport aux coniques du système Σ.

De plus, le système Σ se transforme en lui-même par

polaires réciproques relativement à Σ_0 ; on en conclut immédiatement que le lieu des pôles d'un plan p, par rapport à ces quadriques, est un cône circonscrit au tétraèdre, et ayant pour sommet le pôle de p par rapport à Σ_0.

Autre solution par M. Klug.

2169.

(1911, p. 93.)

Si la courbe (M) *est le lieu des points* M *d'où l'on peut mener à deux courbes données* (A) *et* (B) *des tangentes* MA *et* MB *égales entre elles, et si* α *et* β *sont les centres de courbure répondant respectivement aux points* A *et* B :

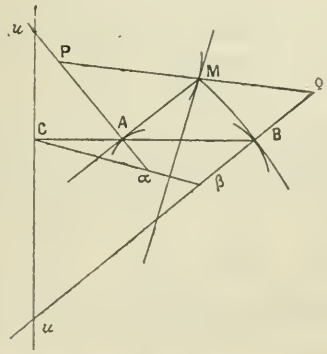
1° *La tangente en* M *à la courbe* (M) *est perpendiculaire à la droite* $\alpha\beta$;

2° *Le point où la droite* AB *touche son enveloppe est à sa rencontre avec la droite* $\alpha\beta$. (M. d'Ocagne.)

SOLUTION,

Par M. N. Abramescu.

1° Soient MP la normale à la courbe (M) aux points M et P, Q les intersections de cette normale avec Aα et Bβ. Le



segment MA a l'extrémité M sur la courbe (M), et reste tangent à la courbe (A); donc la variation de ce segment est

donnée par l'expression

$$\frac{d(\mathrm{MA})}{d\theta} = \alpha\mathrm{P},$$

$d\theta$ étant l'angle de contingence de (A). Remplaçant $d\theta$ par

$$\frac{d(\mathrm{M})}{\mathrm{MP}},$$

la variation de longueur de MA est égale à

$$\frac{\alpha\mathrm{P}\,d(\mathrm{M})}{\mathrm{MP}}.$$

De même, la variation de MB est

$$\frac{\beta\mathrm{Q}\,d(\mathrm{M})}{\mathrm{MQ}}.$$

Or, MA = MB ; donc leurs variations sont égales, et donc

$$\frac{\alpha\mathrm{P}}{\mathrm{MP}} = \frac{\beta\mathrm{Q}}{\mathrm{MQ}},$$

ou

$$\frac{\alpha\mathrm{P}}{\dfrac{\mathrm{MA}}{\cos\mathrm{AMP}}} = \frac{\beta\mathrm{Q}}{\dfrac{\mathrm{MB}}{\cos\mathrm{BMQ}}}.$$

D'où

$$\alpha\mathrm{P}\cos\mathrm{AMP} = \beta\mathrm{Q}\cos\mathrm{BMQ},$$

ce qui prouve que les distances de α et β à la droite MP sont égales ; donc la normale en M est parallèle à $\alpha\beta$, ou que la tangente en M est perpendiculaire à $\alpha\beta$ [1].

2° Soient C le point de contact de la droite AB avec son enveloppe et u et v les intersections de la normale en C à l'enveloppe de AB avec $\mathrm{A}\alpha$ et $\mathrm{B}\beta$. On sait que

$$(1)\qquad \frac{d(\mathrm{A})}{d(\mathrm{B})} = \frac{\mathrm{A}u}{\mathrm{B}v}, \qquad \frac{d(\mathrm{B})}{d(\mathrm{M})} = \frac{\mathrm{B}\beta}{\mathrm{MQ}}, \qquad \frac{d(\mathrm{M})}{d(\mathrm{A})} = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{A}\alpha},$$

les centres instantanés de rotation étant respectivement u, v; β, Q; P, α.

---

[1] Cette première partie est connue : MANNHEIM, *Géométrie cinématique*, p. 46.

Multipliant les relations (1), on trouve le théorème de Mannheim :

$$(2) \qquad \frac{Au}{Bv}\,\frac{B\beta}{A\alpha}\,\frac{MP}{MQ} = 1.$$

Les triangles AuC, BvC, rectangles, étant semblables, on a

$$\frac{Au}{Bv} = \frac{CA}{CB},$$

et remplaçant en (2), on trouve

$$(3) \qquad \frac{CA}{CB}\,\frac{B\beta}{A\alpha}\,\frac{MP}{MQ} = 1.$$

M′ étant l'intersection de la tangente en M avec $\alpha\beta$, on a des triangles APM, BMQ,

$$MP = \frac{MA}{\sin AMM'} = \frac{MA}{\sin A\alpha\beta}, \qquad MQ = \frac{MB}{\sin B\beta\alpha}.$$

La relation (3) devient

$$(4) \qquad \frac{CA}{CB} = \frac{\sin A\alpha\beta}{\sin B\beta\alpha}\,\frac{A\alpha}{B\beta}.$$

Soit C′ le point où la droite $\alpha\beta$ coupe la droite AB. On a

$$\frac{A\alpha}{C'A} = \frac{\sin\alpha C'A}{\sin A\alpha\beta}, \qquad \frac{B\beta}{C'B} = \frac{\sin\beta C'B}{\sin\alpha\beta B};$$

d'où

$$\frac{A\alpha}{B\beta}\,\frac{C'B}{C'A} = \frac{\sin\alpha\beta B}{\sin A\alpha\beta},$$

$$\frac{C'A}{C'B} = \frac{\sin A\alpha\beta}{\sin B\beta\alpha}\,\frac{A\alpha}{B\beta},$$

ce qui prouve que les points C et C′ se confondent.

Donc, le point où AB touche son enveloppe est l'intersection des droites AB et $\alpha\beta$.

Autre solution par M. Gisolf.

2171.

(1911, p. 91.)

Étant donnés dans un plan un point et deux droites parallèles, on considère une sphère variable ayant pour

diamètre le segment intercepté par les deux parallèles sur une droite tournant autour du point. Montrer que l'enveloppe de cette sphère est un ellipsoïde de révolution aplati ou bien un hyperboloïde de révolution à une nappe suivant la position du point fixe par rapport aux deux parallèles. (KLUG.)

SOLUTION,

Par M. N. ABRAMESCU.

Prenons pour les axes coordonnés la parallèle par O aux droites données A et B, et pour Oy la perpendiculaire en O. Les équations des droites A et B étant

$$(A)\quad y = a, \qquad (B)\quad y = b,$$

les points d'intersection de ces droites avec une sécante variable ($y = \lambda x$) menée par O seront

$$M\left(\frac{a}{\lambda}, a\right), \qquad P\left(\frac{b}{\lambda}, b\right).$$

L'équation de la sphère de diamètre MP sera

$$\left(x - \frac{a+b}{2\lambda}\right)^2 + \left(y - \frac{a+b}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{(a-b)^2}{4\lambda^2} + \frac{(a-b)^2}{4},$$

ou

$$(1)\quad x^2 + y^2 + z^2 - \frac{a+b}{\lambda}x - (a+b)y + \frac{ab}{\lambda^2} + ab = 0.$$

L'enveloppe de cette sphère s'obtient en éliminant λ entre les équations (1) et sa dérivée par rapport à λ :

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{a+b}{2ab}x.$$

On trouve :

$$(2)\qquad -\frac{x^2}{ab} + \frac{\left(y - \frac{a+b}{2}\right)^2}{\frac{(a-b)^2}{4}} + \frac{z^2}{\frac{(a-b)^2}{4}} = 1.$$

Transportant les axes tellement que Ox soit la parallèle

équidistante des droites A et B, l'équation (2) devient

$$-\frac{x^2}{ab}+\frac{y^2}{\frac{(a-b)^2}{4}}+\frac{z^2}{\frac{(a-b)^2}{4}}=1,$$

ce qui représente un ellipsoïde ou un hyperboloïde de révolution. D'après l'équation (2), on voit que cette enveloppe est un ellipsoïde ou un hyperboloïde suivant le signe de ab, négatif si O est entre les parallèles données, et positif si le point est extérieur à la région comprise entre ces parallèles.

Autre solution,

Par M. R. Bouvaist.

Soient A le point, Δ et Δ' les deux parallèles données. L'enveloppe des droites telles que les segments interceptés sur elles par Δ et Δ' soient vus d'un point F du plan sous un angle droit est une conique du foyer F, admettant Δ et Δ' pour tangentes perpendiculaires à l'axe focal.

Il y a, par suite, deux des sphères considérées passant par le point F, ayant pour diamètre les tangentes issues de A à la conique précédente.

On voit que l'enveloppe des cercles, sections de ces sphères, n'est autre que le lieu des foyers des coniques passant par A et admettant Δ et Δ' comme tangentes perpendiculaires à l'axe focal. Si A′ est le symétrique de A par rapport à la parallèle D équidistante de Δ et Δ', on a visiblement $AF \pm A'F' = 2d$, $2d$ étant la distance de Δ et Δ', le signe $+$ correspondant au cas où A est entre Δ et Δ', le signe $-$ au cas contraire.

L'enveloppe des cercles sections des sphères par le plan considéré est par suite une ellipse ou une hyperbole, et l'enveloppe des sphères la surface engendrée par ces courbes tournant autour de D, c'est-à-dire un ellipsoïde aplati ou un hyperboloïde à une nappe.

Remarque. — La solution précédente démontre le théorème suivant :

Étant donnée une conique et une corde focale quelconque de cette conique, cette corde coupe les tangentes

perpendiculaires à l'axe focal en A et A', le cercle de diamètre AA' est bitangent à la conique.

QUESTIONS.

2183. — Soient N le point où la normale au point M d'une parabole coupe l'axe, et P et Q les points d'intersection de la parabole avec le cercle qui passe par M, N et le sommet de la parabole.

Montrer *géométriquement* que :

1° MP et MQ sont les normales à la parabole en M et N;

2° La droite de Simson de N, par rapport au cercle MPQ, est l'une des asymptotes de l'hyperbole d'Apollonius de M, par rapport à la parabole et par conséquent :

3° La droite de Simson Δ de N, par rapport au cercle MPQ, est perpendiculaire à l'axe de la parabole;

4° Le lieu du centre du cercle MPQ est une parabole ayant même foyer que la parabole donnée;

5° L'enveloppe du cercle MPQ est une strophoïde droite ayant le point double en O et le pôle au foyer;

6° Le lieu du point d'intersection de la tangente en M à la parabole avec la droite de Simson de N est une cubique qui a pour asymptote la directrice de la parabole.

N. Abramescu.

2184. — Le lieu du milieu des cordes d'une parabole de longueur $2l$ et le lieu des pôles de ces cordes sont deux cubiques asymptotes à la parabole. L'aire comprise entre ces deux cubiques est finie et égale à πl^2, et reste la même pour n'importe quelle parabole. Cette aire est partagée en deux parties égales par la parabole. E.-N. Barisien.

[O¹5n]

SURFACES ENGENDRÉES PAR LE DÉPLACEMENT D'UNE COURBE PLANE INDÉFORMABLE, DE TELLE SORTE QU'IL EXISTE UN CONE CIRCONSCRIT LE LONG DE LA COURBE;

PAR M. E. KERAVAL,
Professeur au Lycée Louis-le-Grand.

On connaît la thèse de M. E. Blutel sur les surfaces qui sont en même temps lieux de coniques et enveloppes de cônes du second degré. On pourra la consulter dans les *Annales de l'École Normale supérieure*, 1890. Pour abréger je désignerai par surface Σ toute surface engendrée par le déplacement d'une courbe plane lorsqu'il existe un cône ou comme cas limite un cylindre circonscrit à la surface le long de chaque courbe plane.

I. — SURFACES Σ DE RÉVOLUTION DE DEGRÉ QUATRE.

Je laisserai de côté le cas où la courbe qui tourne est la méridienne; il est clair que de cette façon-là toute surface de révolution est une surface Σ.

Je vais d'abord considérer le cas où la courbe dont la révolution engendre la surface Σ est une conique. Prenons trois axes rectangulaires et soient

$$z = 0, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

les équations d'une ellipse que je fais tourner autour

d'une droite

$$x = x_0 + \lambda z, \qquad y = y_0 + \mu z.$$

En écrivant que le plan tangent au point

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = b\sin\varphi, \qquad z = 0$$

passe par le point S de coordonnées α, β, γ, j'obtiens cinq équations; trois d'entre elles me donnent α, β, γ :

$$\alpha = \frac{\lambda y_0 - \mu x_0}{\mu},$$

$$\beta = \frac{\lambda y_0 - \mu x_0}{-\lambda},$$

$$\gamma = \frac{(\lambda y_0 - \mu x_0)(a^2\mu^2 + b^2\lambda^2)}{c^2\lambda\mu},$$

où

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Il reste deux autres équations qu'on peut écrire en posant $\frac{\lambda}{\mu} = \rho$:

$$(1)\quad \begin{cases} b^2 x_0 y_0 \rho^3 - (b^2 x_0^2 - c^2 y_0^2 + b^2 c^2)\rho^2 \\ \qquad + (b^2 - c^2) x_0 y_0 \rho - b^2 x_0^2 = 0, \\ a^2 y_0^2 \rho^3 - (a^2 + c^2) x_0 y_0 \rho^2 \\ \qquad + (c^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 - a^2 c^2)\rho - a^2 x_0 y_0 = 0. \end{cases}$$

Or entre ces deux équations on peut éliminer en même temps le terme en ρ^3 et le terme indépendant de ρ; on trouve ainsi

$$(\rho y_0 - x_0)(b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 - a^2 b^2) = 0.$$

L'hypothèse $\rho = \frac{x_0}{y_0}$ conduit à ρ et x_0 nuls donc aux quadriques. Je laisse ce cas de côté, il reste alors

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0.$$

c'est-à-dire que le pied de l'axe de rotation doit être

sur la conique. Posons alors

$$x_0 = a\cos\varphi, \qquad y_0 = b\sin\varphi;$$

les deux équations se réduisent à

$$(2) \qquad ab^2\sin\varphi\cos\varphi\,\rho^3 - b(a^2\cos^2\varphi + c^2\sin^2\varphi)\rho^2 + a(b^2 - c^2)\sin\varphi\cos\varphi\,\rho - a^2 b\cos^2\varphi = 0.$$

Si l'on remplace $\frac{1}{\rho}$ par m on trouve que (2) est l'équation aux coefficients angulaires des normales abaissées du point $x_0 y_0$ sur la conique quand on a supprimé la normale dont le point d'incidence est $x_0 y_0$.

Ces résultats étaient à peu près évidents d'après le théorème de M. Blutel qui dit que la conique doit rouler sur deux courbes. Ici l'une des courbes est réduite à un point, l'autre est une circonférence.

Soit S′ la projection du sommet du cône sur le plan de la conique. Il existe une construction simple de ce point S′. Soit Δ′ la projection de l'axe de révolution Δ sur le plan de la conique. Δ′ coupe Ox en P, Oy en Q; achevons le rectangle OPS$_1$Q. Le symétrique du point S$_1$ ainsi déterminé par rapport au point O donne le point S′ cherché. Ceci est facile à vérifier sur les formules qui donnent α, β. On peut donner une autre construction. Soient α', β' les coordonnées du pôle de Δ′ par rapport à la conique

$$\alpha' = \frac{-a^2\mu}{\lambda y_0 - \mu x_0} = \frac{-a^2}{\alpha},$$

$$\beta' = \frac{b^2\lambda}{\lambda y_0 - \mu x_0} = \frac{-b^2}{\beta}.$$

On reconnaît les formules de Desboves. Donc :

Théorème. — *On obtient les surfaces Σ engendrées par la rotation d'une conique en menant le plan*

normal P *à cette conique en un point* A *pris sur elle. Ce plan coupe la conique en un deuxième point* B. *L'axe de rotation* Δ *est une droite quelconque de* P *passant par* B. *Pour avoir la projection* S′ *du sommet* S *du cône sur le plan de la conique, on mène par* B *les deux normales autres que* BA : BA′ *et* BA″; *alors* S′ *est le pôle de* A′A″. Sur ces surfaces il existe évidemment deux séries de génératrices coniques, car on peut remplacer la conique choisie par la conique située dans le même plan et symétrique de la première par rapport à AB. Comme AB est normale, ces deux coniques sont osculatrices et il en résulte que le cercle double est un cercle de rebroussement. Par homographie on obtient des surfaces Σ du quatrième degré *avec une conique de rebroussement* et un point conique. Dans le cas de la parabole on peut procéder de même, mais alors le cône circonscrit devient un cylindre; on peut aussi prendre A à l'infini. Dans ce cas on doit prendre un point B sur la parabole et par B mener le plan P perpendiculaire au plan de la parabole et parallèle à son axe. L'axe Δ est une droite quelconque de P passant par B.

Généralisation. — On peut se servir des résultats précédents chaque fois que, pour le mouvement du solide lié à la conique, il existe une rotation tangente. Par exemple, comme cas très particulier :

On aura une surface Σ *en faisant rouler le plan* P *supposé lié à la conique sur un cône absolument quelconque ayant son sommet en* B.

Pour réaliser le cas général de la rotation tangente, il faudrait d'abord construire une surface réglée engendrée par le déplacement d'une droite qui rencontrerait la conique en restant tangente au cylindre droit ayant

pour base la développée. On ferait ensuite *virer* sans glissement cette surface sur une deuxième surface applicable sur la première.

Lignes asymptotiques.

Lorsqu'on fait tourner une conique autour d'un axe quelconque la détermination des lignes asymptotiques de la surface conduit à une quadrature hyperelliptique. Je vais faire voir que dans le cas particulier d'une surface Σ de révolution on trouve une intégrale elliptique. Soient

$$(C) \qquad z = my, \qquad x^2 = (ax + by)(y - c)$$

les équations de la conique (C) qui tourne autour de Oz. Je vais chercher suivant quelle loi un mobile doit se déplacer sur cette courbe pour que l'accélération soit dans le plan tangent. J'imagine que le trièdre $Oxyz$ tourne avec la courbe. En posant $y = \lambda x$ les équations (C) peuvent être remplacées par les équations suivantes :

$$x = \frac{c(a + b\lambda)}{\Delta},$$

$$y = \frac{c\lambda(a + b\lambda)}{\Delta} \qquad (\Delta = b\lambda^2 + a\lambda - 1).$$

$$z = \frac{mc\lambda(a + b\lambda)}{\Delta}$$

Si les axes tournent d'un angle φ autour de Oz, on aura, en appelant X, Y, Z les coordonnées dans le système fixe

$$X = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \qquad Y = x\sin\varphi + y\cos\varphi, \qquad Z = z.$$

En dérivant deux fois par rapport au temps on aura les composants de l'accélération par rapport aux axes fixes

d'où facilement par rapport aux axes mobiles. Ces composantes seront, si l'on prend $\varphi = t$,

$$x'' - 2y' - x, \quad y'' + 2x' - y, \quad z'',$$

les accents désignant des dérivations par rapport à t. L'équation des lignes asymptotiques est donc

$$\begin{vmatrix} x'' + 2y' - x & y'' + 2x' - y & z'' \\ x' & y' & z' \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

d'où

$$2b^2\lambda'^2 + 2(a + b\lambda)(a + 2b\lambda)\lambda' \\ + (a + b\lambda)(a + 2b\lambda)(1 + \lambda^2) = 0.$$

Si l'on tire λ', la quantité sous le radical a pour valeur

$$R = (a + b\lambda)(a + 2b\lambda)[3ab\lambda + (a^2 - 2b^2)],$$

ce qui démontre la proposition. Les valeurs de λ qui annulent R correspondent : $\lambda = -\frac{a}{b}$ à l'origine, c'est-à-dire au point fixe de la conique; $\lambda = -\frac{a}{2b}$ au point de la conique où la tangente est parallèle à Ox et qui ne se projette pas sur Oy (celui-là correspondrait à λ infini); enfin $\lambda = \frac{2b^2 - a^2}{3ab}$ correspond à un point A′ de la conique différent de l'origine et tel que SA rencontre Oz. Il est facile de vérifier que le long de SA le plan tangent au cône est perpendiculaire au plan SA, Oz, de sorte que SA engendre un cône de révolution auquel sont tangents tous les cônes circonscrits le long des coniques. Il est bien facile de voir pourquoi cette valeur de λ doit intervenir dans la valeur de R. En effet, si l'on discute la réalité des lignes asymptotiques sur une surface de révolution, on voit qu'elle change quand on passe par un point d'inflexion de la méridienne ou encore lorsque l'angle du plan tangent à la

surface avec l'axe de révolution passe par un maximum ou un minimum. Or ceci arrive évidemment lorsque se déplaçant sur la conique, on arrive en A à cause de la propriété du plan tangent au cône circonscrit le long de SA.

II. — Surfaces Σ de révolution dans le cas général.

Je fais tourner autour de Oz la courbe

$$(A) \qquad z = \mu y, \qquad y = F(x).$$

Il s'agit de déterminer la fonction F de telle sorte qu'il existe un cône circonscrit le long de la courbe. Si α, β, γ désignent les coordonnées du sommet S du cône, on devra avoir

$$\begin{vmatrix} \alpha - x & \beta - y & \gamma - \mu y \\ 1 & y' & \mu y' \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est une équation différentielle de Jacobi qu'on intègre facilement en posant

$$y = ux \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{x} = v.$$

L'équation en u, v est linéaire en v; elle s'écrit

$$\frac{dv}{du} = \frac{u + A}{u^2 + Au + B} v + \frac{C}{u^2 - Au + B},$$

où

$$A = \frac{\alpha}{\beta - \delta}, \qquad B = \frac{-\delta}{\beta - \delta}, \qquad C = \frac{-1}{\beta - \delta}, \qquad \delta = \frac{\gamma}{\mu}.$$

Si u_1, u_2 sont les deux racines de

$$u^2 - Au + B = 0,$$

la résolution de l'équation sans second membre conduit

à poser

$$v = V(u-u_1)^{\frac{u_2}{u_2-u_1}}(u-u_2)^{\frac{u_1}{u_1-u_2}},$$

et l'on a, pour déterminer V, l'équation

$$\frac{dV}{du} = C(u-u_1)^{\frac{2u_2-u_1}{u_1-u_2}}(u-u_2)^{\frac{2u_1-u_2}{u_2-u_1}},$$

ce qui donne V par une quadrature facile à effectuer parce que la somme des deux exposants

$$\frac{2u_2-u_1}{u_1-u_2} + \frac{2u_1-u_2}{u_2-u_1} = -3.$$

Effectivement on a

$$\int (u-u_1)^{\lambda}(u-u_2)^{-\lambda-3}\,du$$
$$= \frac{1}{(u_2-u_1)^2(\lambda+1)(\lambda+2)}\left(\frac{u-u_1}{u-u_2}\right)^{\lambda+1}$$
$$+ \frac{1}{(u_1-u_2)(\lambda+2)}\,\frac{(u+u_1)^{\lambda+1}}{(u-u_2)^{\lambda+2}}.$$

Finalement on trouve

$$\text{(B)} \qquad (y-ax)^m = K(y-bx)^{m-1}(y-h)$$

avec la condition

$$\frac{a}{b} = \frac{m-1}{m},$$

qui donne la projection de la courbe sur xOy.

La condition

$$\frac{a}{b} = \frac{m-1}{m}$$

exprime que cette courbe coupe Oy à angle droit. D'ailleurs les coordonnées du sommet du cône sont données par les formules, où $\rho = b - a$,

$$\frac{\alpha}{h} = \frac{2m-1}{m(m-1)\rho}, \qquad \frac{\beta}{h} = \frac{m(m-1)\rho^2+1}{m(m-1)\rho^2}, \qquad \frac{\gamma}{h} = \mu.$$

Nous trouvons donc une courbe triangulaire en projection horizontale et par suite également dans l'espace. Par exemple, si l'on prend $m = 3$, on a une cubique ayant un point de rebroussement à l'origine et dont le point d'inflexion I se projette sur la droite $y = h$, par conséquent a même z que le sommet S du cône circonscrit. La tangente en S à la trajectoire de S coupe le plan P de la courbe en un point A d'où l'on peut mener deux tangentes : l'une, c'est la tangente en I; soit B le point de contact de l'autre. Le plan tangent au cône le long de SB contenant la tangente en S à la trajectoire de S est perpendiculaire au plan SB, Oz (il est facile de vérifier que SB coupe Oz). Donc, pendant la rotation, le cône circonscrit reste tangent à deux surfaces : d'abord le plan perpendiculaire à Oz et passant par I; ensuite le cône de révolution décrit par SB. Les résultats sont absolument analogues si m est quelconque et positif. Voilà pour l'enveloppe des cônes. Pour celle des courbes, il y a, d'après ce que nous avons vu plus haut, un point C de la courbe situé dans le plan yOz où la tangente est parallèle à Ox; ce point décrit un cercle auquel la courbe reste tangente. On aura de même une surface Σ en faisant rouler sur un cône de sommet O le plan yOz lié à la courbe.

III. — Surfaces Σ engendrées par le mouvement d'une courbe plane indéformable : cas général.

Ici encore nous allons trouver des courbes triangulaires, j'entends par là des courbes ayant une équation de la forme

$$P^{\lambda} Q^{\lambda'} R^{\lambda''} = K,$$

λ, λ', λ'', K étant des constantes liées par la relation

$$\lambda + \lambda' + \lambda'' = 0,$$

$P=0$, $Q=0$, $R=0$ représentant trois droites formant un triangle. Je vais d'abord démontrer sur ces courbes un théorème que je ne crois pas connu et dont j'aurai besoin ultérieurement.

Théorème. — A toute courbe triangulaire correspond une droite Δ et une seule telle que les normales aux points où Δ rencontre la courbe soient concourantes en un point A; A et Δ restant les mêmes quelle que soit la constante K. Cette droite Δ est une droite de Simpson du triangle PQR. Si, de A, on abaisse des normales à la courbe, les pieds de ces normales, lorsque K varie, décrivent la droite Δ et le cercle circonscrit au triangle. Réciproquement, à toute droite de Simpson du triangle correspond un faisceau de courbes triangulaires.

Pour plus de commodité je désignerai Δ par *droite des normales* et A par *point des normales de la courbe*. Soit

$$F(x,y) \equiv P^{\lambda} Q^{\lambda'} R^{\lambda''} - K = 0, \qquad \lambda + \lambda' + \lambda'' = 0,$$
$$P = y - mx - h, \qquad Q = y - m'x - h', \qquad R = y - m''x - h'',$$

l'équation de la courbe. L'équation qui exprime que la normale en un point xy passe par x_0, y_0 est

$$(x_0 - x)(\lambda RQ + \lambda' RP + \lambda'' PQ)$$
$$+ (y_0 - y)(\lambda m QR + \lambda' m' RP + \lambda'' m'' PQ).$$

Cette équation représente une cubique indépendante de K. Elle doit contenir tous les points de Δ, ce qui donne, si Δ coïncide avec Oy,

$$\lambda m + \lambda' m' + \lambda'' m'' = 0,$$

ou pour abréger

$$\Sigma \lambda m = 0, \qquad \Sigma \lambda m h = 0,$$
$$x_0 = \frac{\Sigma \lambda m h' h''}{\Sigma \lambda h}, \qquad y_0 = -\frac{\Sigma \lambda h' h''}{\Sigma \lambda h}.$$

Donc deux conditions :

$$\Sigma\lambda m = 0, \qquad \Sigma\lambda mh = 0;$$

comme on a aussi

$$\Sigma\lambda = 0,$$

ces trois conditions entraînent :

$$\begin{vmatrix} 1 & m & mh \\ 1 & m' & m'h' \\ 1 & m'' & m''h'' \end{vmatrix} = 0,$$

qui exprime que Oy est une droite de Simpson du triangle. Ayant choisi dans le plan le triangle PQR, voyons comment il faut le déplacer dans son plan pour que les deux conditions $\Sigma\lambda m = 0$, $\Sigma\lambda mh = 0$ soient vérifiées. Choisissons l'angle φ de P avec Ox pour que $\Sigma\lambda m = 0$; cela nous donne, en posant $\operatorname{tang}\varphi = u$,

$$\lambda u + \frac{\lambda'(u + A)}{1 - uA} + \frac{\lambda''(u + B)}{1 - uB} = 0,$$

A et B étant différents de zéro d'après leur signification géométrique facile à voir. En développant et en supprimant le facteur $u^2 + 1$ il reste

$$\lambda AB u + \lambda' A + \lambda'' B = 0,$$

qui donne u. Ainsi pour que $\Sigma\lambda m$ soit nul, il faut que les côtés soient parallèles à trois droites parfaitement déterminées, donc un seul orientement. Je suppose donc le triangle orienté de façon que

$$\Sigma\lambda m = 0;$$

je dis qu'alors une translation de triangle parallèlement à Ox rendra $\Sigma\lambda mh$ nul. En effet, il faut disposer de μ pour que

$$\Sigma\lambda m(h + m\mu) = 0,$$

$$\mu = -\frac{\Sigma\lambda mh}{\Sigma\lambda m^2},$$

et $\Sigma\lambda m^2$ n'est pas nul sans quoi, comme on a

$$\Sigma\lambda = 0 \qquad \text{et} \qquad \Sigma\lambda m = 0,$$

les trois quantités m, m', m'' ne seraient pas distinctes. Une translation parallèle à Oy ne change rien. Donc il existe une infinité de positions du triangle pour lesquelles les deux égalités

$$\Sigma\lambda m = 0, \qquad \Sigma\lambda mh = 0$$

sont vérifiées; mais elles se déduisent de l'une d'elles par une translation parallèle à Oy. Donc le triangle étant placé et les nombres λ, λ', λ'' choisis, il existe une seule droite Δ.

Réciproquement, considérons un triangle PQR et une de ses droites de Simpson que nous prenons pour axe des y. Si m, m', m'' sont les coefficients angulaires des trois côtés PQR, on devra prendre λ, λ', λ'' égaux ou proportionnels à

$$m' - m'', \qquad m'' - m, \qquad m - m',$$

afin que

$$\lambda + \lambda' + \lambda'' = 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda m + \lambda' m' + \lambda'' m'' = 0,$$

et, comme Oy est une droite de Simpson, on aura aussi

$$\lambda mh + \lambda' m' h' + \lambda'' m'' h'' = 0.$$

Revenons maintenant à l'équation de la cubique

$$\begin{aligned}&(x_0 - x)(\lambda QR + \lambda' RP + \lambda'' PQ)\\ &\quad + (y_0 - y)(\lambda m QR + \lambda' m' RP + \lambda'' m'' PQ) = 0;\end{aligned}$$

si Oy est la droite des normales, cette cubique se décompose en Oy et une conique. Or l'ensemble des termes du troisième degré est

$$-\Sigma\lambda m' m'' x(x^2 + y^2);$$

donc la conique est un cercle et c'est le cercle circonscrit au triangle PQR, car la cubique passe par les sommets du triangle et par la droite des normales dans le cas général.

Cas particulier des coniques. — Dans ce cas, deux des exposants λ, λ', λ'' sont égaux; on a alors le théorème suivant :

Théorème. — Étant données toutes les coniques qui sont tangentes en B et C à deux droites sécantes AB, AC, il existe une droite Δ et une seule telle que les normales aux coniques aux points où elles coupent Δ soient concourantes en un point H. Si de H on mène des normales à toutes les coniques, les pieds de ces normales sont sur Δ et sur le cercle circonscrit au triangle. Pour avoir ce point H on prolonge la médiane qui part de A jusqu'à sa rencontre en A′ avec le cercle circonscrit et par ce point on mène la perpendiculaire à BC qui coupe le cercle au point cherché H. La droite de Simpson de H est la droite cherchée, elle est parallèle à la médiane AA′.

La première partie résulte de ce que j'ai dit plus haut, le reste est un problème facile de géométrie élémentaire. Je reviens maintenant à mon sujet.

Théorème I. — *Si une courbe plane indéformable engendre en se déplaçant une surface Σ cette courbe est nécessairement une courbe triangulaire.*

Je prends la courbe à l'instant t, son déplacement infiniment petit équivaut pour les vitesses à un mouvement hélicoïdal. Soit Oz l'axe de ce mouvement hélicoïdal instantané. Avec les notations habituelles nous

avons ici

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta \neq 0, \quad p = 0, \quad q = 0, \quad r \neq 0.$$

Soient

$$z = \mu y, \quad y = F(x)$$

les équations par rapport au trièdre mobile de la courbe qui se déplace. En posant

$$-\frac{\zeta}{r} = h,$$

l'équation qui exprime que les plans tangents le long de la courbe vont passer par le point S de coordonnées α, β, γ est

$$\begin{vmatrix} \alpha - x & \beta - y & \gamma - \mu y \\ 1 & y' & \mu y' \\ y & -x & h \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(3) \quad y' = \frac{-\mu x y + \gamma x - h y + h\beta}{-\mu x^2 + (\mu\alpha - h)x - (\mu\beta - \gamma)y + h\alpha} = \frac{dy}{dx}.$$

On a encore une équation différentielle de Jacobi et l'on sait que l'intégrale est de la forme

$$(ax + by + c)^{\lambda}(a'x + b'y + c')^{\lambda'}(a''x + b''y + c'')^{\lambda''} = K$$

avec

$$\lambda + \lambda' + \lambda'' = 0.$$

Théorème II. — *La droite des normales de la courbe triangulaire est la caractéristique du plan de la courbe.*

En effet, écrivons que

$$(4) \quad (ax + b - y)^{\lambda}(a'x + b' - y)^{\lambda'}(a''x + b'' - y)^{\lambda''} = K$$

est solution de l'équation différentielle (3). De (4)

nous tirons

$$(5)\quad y' = \frac{\lambda a\,\mathrm{QR} + \lambda' a'\,\mathrm{RP} + \lambda'' a''\,\mathrm{PQ}}{\lambda\,\mathrm{QR} + \lambda'\,\mathrm{RP} + \lambda''\,\mathrm{PQ}} \qquad (\mathrm{P} = ax + b - y).$$

Au numérateur le coefficient de y^2 doit être nul, ce qui donne

$$\lambda a + \lambda' a' + \lambda'' a'' = 0;$$

donc la droite des normales est parallèle à Oy. Je dis que cette droite a pour équation $x = -\frac{h}{\mu}$.

En effet, si l'on prend cette droite pour axe des y, l'équation devient

$$\left(ax + b - \frac{ah}{\mu} - y\right)^{\lambda} \times \left(a'x + b' - \frac{a'h}{\mu} - y\right)^{\lambda'} \left(a''x + b'' - \frac{a''h}{\mu} - y\right)^{\lambda''} = \mathrm{K},$$

et Oy sera la droite des normales si

$$\Sigma \lambda a \left(b - \frac{ah}{\mu}\right) = 0$$

ou

$$\frac{h}{\mu} = \frac{\Sigma \lambda ab}{\Sigma \lambda a^2}.$$

Or $\frac{h}{\mu}$ c'est le rapport des coefficients de y et xy au numérateur de y' dans (3); or dans (5) le rapport des mêmes coefficients est

$$\frac{\Sigma \lambda a(b' + b'')}{\Sigma \lambda a(a' + a'')} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\Sigma \lambda ab}{\Sigma \lambda a^2}.$$

Je me suis servi de l'équation de la projection de la courbe sur xOy, alors que j'aurais dû prendre la courbe dans son plan afin de ne pas compliquer les notations. Il aurait fallu remplacer $aa'\ldots$ par $a_1 a'_1$. Mais les secondes sont proportionnelles aux premières. Ainsi

les équations de la droite des normales sont

$$x = -\frac{h}{\mu}, \qquad z = \mu y.$$

Or les formules qui donnent la vitesse sont

$$V_x = -ry, \qquad V_y = rx, \qquad V_z = \zeta.$$

Sur la droite caractéristique du plan $z = \mu y$ la vitesse doit être dans ce plan, donc

$$\zeta = \mu r x,$$

d'où

$$x = \frac{1}{\mu}\frac{\zeta}{r} = -\frac{h}{\mu}.$$

Théorème III. — *Le point des normales coïncide à chaque instant avec le centre de courbure de l'arête de rebroussement* (λ) *de l'enveloppe du plan des courbes. Cette courbe* (λ) *doit donc avoir sa courbure constante.*

Je considère le trièdre de Frenet $Oxyz$ correspondant à cette courbe (λ). Ox sera la tangente, Oy la normale principale dirigée vers le centre de courbure et Oz la binormale. La courbe est dans le plan xOy et si elle se déplace dans ce plan, ce ne peut être que par une translation parallèle à Ox d'après ce qui précède. Nous verrons que cette translation est nulle. Soient α, β, γ les coordonnées du sommet S du cône. Les composantes de la vitesse d'un point de la courbe seront, en remarquant que q, r, ζ sont nuls,

$$V_x = \xi - ry + A,$$
$$V_y = rx,$$
$$V_z = py.$$

Donc

$$\begin{vmatrix} \alpha - x & \beta - y & \gamma \\ 1 & y' & 0 \\ \xi - ry + A & rx & py \end{vmatrix} = 0,$$

A provenant de la translation possible parallèle à Ox. On tire de là

$$(6)\qquad y' = \frac{py^2 + r\gamma x - p\beta y}{pxy - (p\alpha + r\gamma)y + \gamma(\xi + A)}.$$

Soit maintenant

$$P\lambda Q\lambda' R\lambda'' = K, \qquad \lambda + \lambda' + \lambda'' = 0,$$
$$P = ay + x - b, \qquad Q = a'y + x - b', \qquad R = a''y + x - b'',$$

l'intégrale de l'équation différentielle. On tire de là

$$(7)\qquad y' = -\frac{\lambda QR + \lambda' RP + \lambda'' PQ}{\lambda a QR + \lambda' a' RP + \lambda'' a'' PQ}.$$

L'identification de (6) et (7) donne

$$\Sigma\lambda = 0, \qquad \Sigma\lambda a = 0, \qquad \Sigma\lambda ab = 0, \qquad \Sigma\lambda b'b'' = 0,$$

qui expriment que Ox est la droite des normales et que l'x du point des normales est nul. Donc pas de translation possible et par suite $A = 0$. On a ensuite, en appelant ρ un coefficient de proportionnalité,

$$\begin{aligned}
-p\rho &= \Sigma\lambda a'a'',\\
-r\gamma\rho &= \Sigma\lambda b,\\
-p\beta\rho &= \Sigma\lambda(a'b'' + a''b'),\\
\rho(p\alpha + r\gamma) &= \Sigma\lambda a(a'b'' + a''b'),\\
\xi\gamma\rho &= \Sigma\lambda ab'b''.
\end{aligned}$$

On tire de là

$$\frac{\xi}{r} = -\frac{\Sigma\lambda ab'b''}{\Sigma\lambda b},$$

c'est précisément l'y du point des normales. Il suffit donc de constater que $y_0 = \frac{\xi}{r}$ est l'y du centre de courbure de (λ) ou le pied de la droite polaire ou le pied sur xOy de la caractéristique du plan normal

qu'on obtient de suite en écrivant $V_y = 0$, d'où

$$y = \frac{\xi}{r}.$$

Il reste quatre équations qui donnent α, β, γ, ρ.

Conclusion. — « Ayant choisi une courbe T triangulaire, soit A son point des normales et Δ la droite des normales. On choisira une courbe (λ) à courbure constante égale à la distance de A à Δ et on la placera dans le trièdre de Frenet de (λ) de telle sorte que Δ coïncide avec Ox et A avec le centre de courbure de (λ). La courbe T liée au trièdre décrira une surface Σ et les points où cette courbe rencontre l'axe Ox du trièdre décriront des courbes auxquelles T restera tangente. »

Cette dernière partie est facile à vérifier avec les formules qui donnent la vitesse. On suppose évidemment que T n'est pas une conique.

(*A suivre.*)

[D4a]

SUR LA DÉRIVÉE LOGARITHMIQUE DE CERTAINES FONCTIONS ENTIÈRES;

Par M. G. VALIRON.

Les fonctions entières que je considère ici sont des fonctions d'ordre nul, satisfaisant à une condition de croissance. Soit $\rho(x)$ *un exposant net de la suite des zéros*, c'est-à-dire une fonction non croissante, telle

que $\rho(x)\log x$ croît (ou ne décroît pas) : et qu'on ait

$$n \leqq r_n^{\rho(r_n)},$$

r_n désignant le module du n^e zéro, l'égalité ayant lieu pour une infinité de valeurs de l'indice n, que j'appellerai *indices principaux* (¹).

Je supposerai que la fonction

$$[\rho(x)]^2 \log x,$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{x}$.

1. Dans ces conditions, soit

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_1^\infty \frac{1}{z - a_n}$$

la dérivée logarithmique considérée. Je vais démontrer la proposition suivante :

Il existe une infinité de cercles de rayons indéfiniment croissants, sur lesquels on a l'égalité

$$(1) \qquad g(z) = \frac{n}{z}(1 + \varepsilon),$$

n étant le nombre des zéros intérieurs au cercle considéré, et ε une quantité complexe tendant vers zéro avec $\frac{1}{z}$.

Soient, en effet, un indice principal N, r_N le module du zéro correspondant; nous poserons pour simplifier

$$R = r_N,$$

$$R' = R e^{\rho(R)\sqrt{\log R}};$$

(¹) L'existence des fonctions $\rho(x)$ est démontrée dans mon Mémoire : *Sur les fonctions entières d'ordre nul* (*Matematische Annalen*, B. LXX, p. 471).

le nombre m des zéros compris entre les cercles de rayons R et R′ est

$$m = N' - N,$$

N′ étant le nombre des zéros de module inférieur à R′. Or on a

$$N' \leqq R'^{\rho(R')} \leqq R'^{\rho(R)} = R^{\rho(R)} e^{\frac{1}{\sqrt{\log R}}},$$

d'où

$$m \leqq R^{\rho(R)} e^{\frac{1}{\sqrt{\log R}}} - R^{\rho(R)} = R^{\rho(R)} \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{\log R}} \qquad \left(\lim_{R=\infty} \varepsilon = 0\right).$$

Appliquons maintenant entre les cercles de rayons R et R′ le procédé d'exclusion de M. Boutroux [1], on pourra trouver des cercles de rayon r compris entre R et R′, tels que $r = \frac{R'}{k}$ (k fini) et tels que si i est le nombre défini par les inégalités

$$r_i < r < r_{i+1},$$

on ait

$$\left.\begin{aligned} r_{i+p} - r &> \frac{R'}{k'm}(p-1) \\ r - r_{i-p} &> \frac{R'}{k'm} p \end{aligned}\right\} \quad k' \text{ fini} \quad \left\{\begin{aligned} &(i+p \leqq N'). \\ &(i-p \geqq N). \end{aligned}\right.$$

Il résulte de là que nous aurons

$$\left| \sum_{N}^{N'} \frac{1}{z - a_n} \right| < \sum_{N}^{N'} \frac{1}{|r - r_n|} < \frac{k'm}{R'} \sum \frac{1}{p};$$

le dernier Σ est étendu, d'une part, de 1 à $N' - i$, d'autre part de 1 à $i - N$; donc

$$\sum \frac{1}{p} < 2 \sum_{1}^{\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{1}{p} < 2 \log m$$

---

[1] *Voir* mon article *Sur les fonctions entières d'ordre nul* (*Nouvelles Annales*).

$\left[\left(\frac{m}{2}\right)$ désigne la partie entière de $\frac{m}{2}\right]$, et par suite :

$$\left|\sum_{N}^{N'} \frac{1}{2-a_n}\right| < \frac{2k'm\log m}{R'} < \frac{2k'R^{\rho(R)}\rho(R)\log R(1+\varepsilon)}{R'\sqrt{\log R}},$$

et encore, comme

$$\rho(R)\sqrt{\log R}$$

tend vers zéro,

$$\left|\sum_{N}^{N'} \frac{1}{2-a_n}\right| < \frac{\varepsilon R^{\rho(R)}}{R'} \qquad \left(\lim_{R=\infty} \varepsilon = 0\right).$$

Considérons maintenant les autres termes de $g(z)$. Pour $n > N'$, on a

$$r = \frac{R'}{k} < \frac{r_n}{k},$$

donc

$$r_n - r > \left(1 - \frac{1}{k}\right) r_n$$

et

$$\left|\sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{z-a_n}\right| < \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{r_n - r} < \frac{k}{k-1} \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{r_n}.$$

Posons $M = R'^{\rho(R')}$; pour $n > M$, nous aurons comme $\rho(r_n) < \rho(R')$,

$$n < r_n^{\rho(r_n)} < r_n^{\rho(R')},$$

d'où

$$\frac{1}{r_n} < \frac{1}{n^{\frac{1}{\rho(R')}}},$$

et par suite

$$\sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{r_n} < \frac{M-N'}{R'} + \sum_{M+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{\rho(R')}}}$$

$$< \frac{M-N'}{R'} + \int_M^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{1}{\rho(R')}}} = \frac{M-N'}{R'} + \frac{\rho(R')M}{[1-\rho(R')]R'}.$$

Comme on a, d'une part,

$$M = R'^{\rho(R')} \leqq R'^{\rho(R)} \leqq R^{\rho(R)} e^{\frac{1}{\sqrt{\log R}}}$$

et, d'autre part,

$$N' > N = R^{\rho(R)},$$

on voit que l'on obtiendra encore ici

$$\left| \sum_{N'+1}^{\infty} \frac{1}{z - a_n} \right| < \frac{\varepsilon R^{\rho(R)}}{R'} \qquad \left(\lim_{R=\infty} \varepsilon = 0\right).$$

En tenant compte de l'inégalité précédemment obtenue, nous avons

$$\left| \sum_{N}^{\infty} \frac{1}{z - a_n} \right| < \frac{\varepsilon R^{\rho(R)}}{R'} \quad (^1).$$

Il reste à considérer l'expression

$$\sum_{1}^{N} \frac{1}{z - a_n},$$

comme $\frac{R}{r}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{R}$, nous aurons pour les termes de cette somme

$$\frac{1}{z - a_n} = \frac{1 + \varepsilon_n}{z},$$

ε_n étant une quantité complexe, inférieure en valeur absolue à un nombre arbitrairement petit; il résulte de là l'égalité

$$\sum_{1}^{N} \frac{1}{z - a_n} = \frac{(1 + \varepsilon)N}{z}.$$

---

(1) Dans tout ce qui suit, ε désigne une quantité tendant vers zéro avec $\frac{1}{R}$ ou $\frac{1}{N}$.

ε étant une quantité complexe tendant vers zéro avec $\frac{1}{Z}$, et finalement

$$g(z) = \frac{(1+\varepsilon)N}{z}.$$

De plus, en remarquant que le nombre des zéros contenus dans le cercle r est compris entre N et $N' = N(1+\varepsilon')$, on voit que la proposition énoncée est établie.

2. Il résulte de la proposition précédente que, sur les cercles considérés, la fonction $g(z)$ est comparable à la dérivée logarithmique d'un polynome de degré n, dont les racines auraient un module très petit par rapport à celui de z. L'analogie se poursuit en ce que, *à l'intérieur d'un tel cercle la fonction $f'(z)$ a $n-1$ racines*. En effet comme

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = g(z) = \frac{(1+\varepsilon)n}{z},$$

la variation de

$$\log f'(z) - \log f(z) = \log g(z),$$

lorsque z décrit le cercle, est égale à celle de $-\log z$, c'est-à-dire à $-2\pi i$, ce qui démontre la proposition.

On voit que, si les cercles pour lesquels la proposition a lieu sont suffisamment rapprochés, *le rapport des nombres des racines de $f(z)$ et $f'(z)$, contenus dans un cercle de rayon r, tend vers 1 lorsque r croît indéfiniment*. C'est ce qui a lieu, en particulier, lorsque le *rapport de deux indices principaux successifs tend vers 1*.

Il existe d'ailleurs des fonctions pour lesquelles le rapport des nombres des zéros de la fonction et de sa dérivée n'a pas pour limite 1 ; cela a lieu notamment

lorsque, n_a désignant le nombre des zéros de $f(z)+a$ contenus dans le cercle de rayon r, $\frac{n_a}{n_b}$ n'a pas pour limite 1 lorsque r croît indéfiniment [1], car n' étant le nombre des zéros de $f'(z)$ dans le même cercle, l'un au moins des rapports $\frac{n'}{n_a}$, $\frac{n'}{n_b}$ ne tendra pas vers 1.

3. En nous plaçant toujours dans le cas où $\rho(x)$ vérifie la condition de croissance indiquée, nous allons, en faisant une hypothèse sur la distribution des zéros, préciser la région du plan où l'égalité (1) est vérifiée. Nous supposerons qu'on a

$$(2) \qquad n + h_n = r_n^{\rho(r_n)} \qquad (0 < h_n < H < 1).$$

Posons

$$r_i \leqq r = |z| \leqq r_{i+1},$$

$$R e^{\frac{1}{\varepsilon(R)}} = r \qquad (R' = 2r);$$

$\varepsilon(x)$ étant une fonction tendant vers zéro et qui sera déterminée ultérieurement, de telle façon que le nombre N des zéros de module inférieur à R tende vers i lorsque R croît indéfiniment. En désignant encore par N' le nombre des zéros contenus dans le cercle de rayon R', les calculs faits précédemment donnent

$$\sum_1^N \frac{1}{z - a_n} = \frac{(1+\varepsilon)N}{z},$$

$$\left| \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{z - a_n} \right| < \frac{\varepsilon' R^{\rho(R)}}{R'}.$$

---

[1] Pour l'existence de telles fonctions, *voir* mon article sur *Le théorème de M. Picard pour les fonctions entières d'ordre nul* (*Nouvelles Annales*, 1911, p. 145). Les cercles, pour lesquels $n_a = n_b$, sont aussi ceux pour lesquels $n' = n_a - 1$ (il s'agit ici des cercles considérés dans les démonstrations du théorème de M. Wiman et du théorème du paragraphe 1).

Considérons la somme restante

$$\left|\sum_{N+1}^{N'} \frac{1}{z-a_n}\right| < \sum_{N+1}^{N'} \frac{1}{|z-a_n|},$$

n étant compris entre N et N′, nous avons

$$r_{n+1} \geqq (n+1)^{\frac{1}{\rho(r_{n+1})}} \geqq (n+1)^{\frac{1}{\rho(r_n)}},$$

$$r_n \leqq (n+\mathrm{H})^{\frac{1}{\rho(r_n)}},$$

d'où

$$r_{n+1} \geqq r_n\left(1+\frac{1-\mathrm{H}}{n+\mathrm{H}}\right)^{\frac{1}{\rho(r_n)}} > r_n\left[1+\frac{1-\mathrm{H}}{(n+\mathrm{H})\rho(r_n)}\right],$$

et comme

$$n+\mathrm{H} < \mathrm{N}', \qquad \rho(r_n) < \rho(\mathrm{R});$$

$$r_{n+1} > r_n\left[1-\frac{1-\mathrm{H}}{\mathrm{N}'\rho(\mathrm{R})}\right],$$

c'est-à-dire finalement

$$r_{n+1}-r_n > \frac{r_n(1-\mathrm{H})}{\mathrm{N}'\rho(\mathrm{R})} > \frac{\mathrm{R}(1-\mathrm{H})}{\mathrm{N}'\rho(\mathrm{R})}.$$

On aura par suite

$$\sum_{i+2}^{\mathrm{N}} \frac{1}{|z-a_n|} < \frac{\mathrm{N}'\rho(\mathrm{R})}{\mathrm{R}(1-\mathrm{H})}\log(\mathrm{N}'-i)$$

et

$$\sum_{\mathrm{N}}^{i-1} \frac{1}{|z-a_n|} < \frac{\mathrm{N}'\rho(\mathrm{R})}{\mathrm{R}(1-\mathrm{H})}\log(i-\mathrm{N}).$$

Finalement

$$\left|\sum_{\mathrm{N}+1}^{\mathrm{N}'} \frac{1}{z-a_n}\right| < \left|\frac{1}{z-a_i}\right| + \left|\frac{1}{z-a_{i+1}}\right| + \frac{2\mathrm{N}'\rho(\mathrm{R})\log\mathrm{N}'}{\mathrm{R}(1-\mathrm{H})};$$

comme de plus

$$\mathrm{N}' < \mathrm{R}'^{\rho(\mathrm{R})} \leqq (2r)^{\rho(\mathrm{R})} < (1+\varepsilon)\mathrm{R}^{\rho(\mathrm{R})}\, e^{\frac{\rho(\mathrm{R})}{\varepsilon\mathrm{R}}},$$

le dernier terme du second membre est inférieur à

$$\frac{2(1+\varepsilon)R^{\rho(R)}\left[\log R+\frac{1}{\varepsilon(R)}\right][\rho(R)]^2}{(1-H)R},$$

ou encore à

$$\frac{R^{\rho(R)}}{r}\,\frac{2(1+\varepsilon)}{1-H}\left\{[\rho(R)]^2\log R\left[1+\frac{1}{\varepsilon(R)\log R}\right]e^{\frac{1}{\varepsilon(R)}}\right\};$$

en prenant

$$\frac{1}{\varepsilon(R)}=\log\frac{1}{\rho(R)\sqrt{\log R}},$$

la quantité entre crochets tend vers zéro, et comme $\frac{\rho(R)}{\varepsilon(R)}$ tend vers zéro la condition $\lim\frac{N'}{N}=1$ est bien remplie. Nous aurons d'après ce qui précède, en supposant que le point z est extérieur aux cercles de centres a_i et a_{i+1} et de rayon $\frac{r_{i+1}-r_i}{k}$, $k>1$,

$$\left|\frac{1}{z-a_i}\right|+\left|\frac{1}{z-a_{i+1}}\right|<\frac{\varepsilon i}{r}.$$

En résumé on aura bien l'égalité

$$(1)\qquad g(z)=\frac{(1+\varepsilon)n}{z},$$

valable à l'extérieur d'un cercle de rayon R_0 *et de cercles ayant pour centres les zéros* a_n *et pour rayons* $\frac{r_{n+1}-r_n}{k}=r_n\frac{k_1}{n\rho(r_n)}$.

Les conclusions relatives à la dérivée prendront alors la forme remarquable suivante : *Il y a dans le cercle* R_0 *un nombre de zéros de* $f'(z)$ *égal à celui de* $f(z)$ *diminué d'une unité, les autres racines de la dérivée se trouvent dans les cercles ayant pour centres les zéros* a_n *de* $f(z)$ *et pour rayon* $\frac{k_1 r_n}{n\rho(r_n)}$.

Autrement, si b_n est le zéro d'ordre n de la dérivée, on a

$$b_{n-1} = a_n \left[1 + \frac{k'}{n\rho(r_n)} \right],$$

k' étant un nombre complexe fini.

On peut également de l'égalité (1) tirer une expression asymptotique de $\log f(z)$; on aura, en effet,

$$\log f(z) = (1 - \varepsilon) \int_{z_0}^{z} \frac{n\,dz}{z},$$

le chemin d'intégration ne coupant pas les cercles d'exclusion. Par suite, en formant ce chemin d'arcs de cercles et de droites passant par l'origine, on aura

$$\mathcal{R}[\log f(z)] = (1 + \varepsilon) \int_{r_0}^{r} \frac{n\,dx}{x}.$$

Comme, d'autre part, sur un cercle $[z] = r$, on a

$$\int_{z}^{z'} \frac{n\,dz}{z} = n \log \frac{z'}{z},$$

nous obtiendrons, en posant

$$z = re^{i\varphi},$$

$$\log f(z) = (1 + \varepsilon_1) \int_{r_0}^{r} \frac{n\,dx}{x} + i(1 + \varepsilon_2)(\varphi + \varphi_0) \quad (^1).$$

4. Les résultats obtenus s'étendent immédiatement aux fonctions méromorphes

$$G(z) = \sum_{1}^{\infty} \frac{A_n}{z - a_n} \qquad (C < A_n < D);$$

---

(1) Un calcul direct donnerait

$$f(z) = \left(\frac{z^n}{a_1 a_2 \ldots a_n} \right)^{1+\varepsilon}$$

C et D étant de même signe, et a_n étant le $n^{\text{ième}}$ zéro d'une fonction d'ordre nul $f(z)$, dont l'exposant net satisfait aux conditions précédentes.

On aura ici

$$G(z) = \frac{(1+\varepsilon)\Sigma A_n}{z},$$

sur une infinité de cercles dans le cas général, et dans tout le plan à l'exclusion de cercles de centres a_n dans le cas où l'on a l'égalité (2). Si l'on pose

$$G(z) = \frac{f_1(z)}{f(z)},$$

on voit que $f_1(z)$ a un zéro de moins que $f(z)$ dans une infinité de cercles et, dans le cas particulier de l'égalité (2), le zéro c_n de $f_1(z)$ est donné par l'égalité

$$c_n = a_{n+1}\left[1 + \frac{k'}{n\rho(r_n)}\right].$$

[H11c]

UNE APPLICATION DE L'ÉQUATION FONCTIONNELLE DE FREDHOLM;

PAR M. CH. PLATRIER,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

Le but de cette Note est la résolution de l'équation fonctionnelle

$$(1) \qquad \varphi(s) - \lambda\int_a^b K(s,t)\frac{\partial^n \varphi(t)}{\partial t^n}\,dt = f(s),$$

lorsque le noyau $K(s, t)$ est astreint à la condition suivante : *La résolvante* $K(s, t, \lambda)$ *de l'équation fonction-*

nelle de Fredholm *de noyau* K (s, t) *admet comme dérivée* $n^{\text{ième}}$, *par rapport à* s, *la résolvante* $K_n(s, t, \lambda)$ *de l'équation fonctionnelle de* Fredholm *de noyau* $\frac{\partial^n K(s, t)}{\partial s^n}$.

Nous nous proposons, en premier lieu, de traduire sous forme d'équation la condition ci-dessus. Rappelons tout d'abord les résultats suivants :

1° Le noyau et la résolvante d'une équation de Fredholm sont liés par les relations

$$(2) \qquad -K(s, t) + K(s, t, \lambda) = \lambda \int_a^b K(s, z) K(z, t, \lambda)\, dz,$$

$$(3) \qquad = \lambda \int_a^b K(z, t) K(s, z, \lambda)\, dz.$$

2° La solution de l'équation de Fredholm

$$(4) \qquad \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t)\, dt = f(s),$$

est

$$(5) \qquad \varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t, \lambda) f(t)\, dt,$$

quand λ n'est pas une constante caractéristique du noyau K (s, t).

Dans la suite, nous nous contenterons du signe $\int$ pour représenter $\int_a^b$, et nous supposerons que λ n'est pas une constante caractéristique du noyau K (s, t).

Ceci posé, considérons l'équation (4) et l'équation (6)

$$(6) \qquad \psi(s) - \lambda \int_a^b \frac{\partial^{n+p} K(s, t)}{\partial s^n\, \partial t^p} \psi(t)\, dt = g(s).$$

Soit $K_{n+p}(s, t, \lambda)$ sa résolvante ; cherchons à expri-

mer la condition, pour que

$$(7) \qquad K_{n+p}(s, t, \lambda) = \frac{\partial^{n+p} K(s, t, \lambda)}{\partial s^n \partial t^p}.$$

En vertu de (2), on a, pour définir $K_{n+p}(s, t, \lambda)$,

$$(8) \quad -\frac{\partial^{n+p} K(s, t)}{\partial s^n \partial t^p} + K_{n+p}(s, t, \lambda) = \lambda \int \frac{\partial^{n+p} K(s, z)}{\partial s^n \partial z^p} K_{n+p}(z, t, \lambda) dz,$$

et en dérivant (2) n fois par rapport à s et p fois par rapport à t, on obtient

$$(9) \quad \frac{\partial^{n+p} K(s, t)}{\partial s^n \partial t^p} + \frac{\partial^{n+p} K(s, t, \lambda)}{\partial s^n \partial t^p} = \lambda \int \frac{\partial^n K(s, z)}{\partial s^n} \frac{\partial^p K(z, t, \lambda)}{\partial t^p} dz.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que (7) soit remplie sera, en vertu de (8) et (9),

$$\int \left\{ \frac{\partial^n K(s, t)}{\partial s^n} \frac{\partial^p K(z, t, \lambda)}{\partial t^p} - \frac{\partial^{n+p} K(s, z)}{\partial s^n \partial z^p} \frac{\partial^{n+p} K(z, t, \lambda)}{\partial z^n \partial t^p} \right\} dz \equiv 0.$$

Elle peut s'écrire encore

$$(10) \quad \left[K(s, z) K(z, t, \lambda) - \frac{\partial^p K(s, z)}{\partial z^p} \frac{\partial^n K(z, t, \lambda)}{\partial z^n} \right] dz = A(s, t, \lambda),$$

avec

$$(11) \quad A(s, t, \lambda) = s^{n-1} \mu_1(t) + s^{n-2} \mu_2(t) + \ldots + \mu_n(t) \\ + t^{p-1} \nu_1(s) + t^{p-2} \nu_2(s) + \ldots + \nu_p(s),$$

les fonctions μ et ν étant des fonctions de λ.

Notons de suite que si l'on fait $\lambda = 0$ dans l'équation précédente, on a

$$(12) \quad \int \left\{ K(s, z) K(z, t) \right. \\ \left. - \frac{\partial^p K(s, z)}{\partial z^p} \frac{\partial^n K(z, t)}{\partial z^n} \right\} dz = A(s, t, 0) = B(s, t),$$

$B(s, t)$ étant une fonction de forme analogue à $A(s, t, \lambda)$, mais où les fonctions μ et ν sont indépendantes de λ.

Je dis que, réciproquement, *toutes les fois que n ou p sera nul*, la condition (12) entraînera la condition (10).

Dérivons, en effet, n fois par rapport à s l'équation (2)

$$(13)\quad -\frac{\partial^n K(s,t)}{\partial s^n}+\frac{\partial^n K(s,t,\lambda)}{\partial s^n}=\lambda\int\frac{\partial^n K(s,z)}{\partial s^n}K(z,t,\lambda)\,dz.$$

Multiplions l'équation (2) par $K(u,s)\,ds$, l'équation (13) par $\frac{\partial^p K(u,s)}{\partial s^p}\,ds$, et intégrons la différence entre a et b ; on obtient

$$-B_1(u,t)+A_1(u,t,\lambda)=\lambda\int K(z,t,\lambda)\,B_1(u,z)\,dz,$$

en désignant par $A_1(s,t,\lambda)$, $B_1(s,t)$ les premiers membres des équations (10) et (12).

En se servant de l'équation (3), on démontrerait une relation analogue, et finalement, avec un léger changement de notation, on a les égalités

$$(14)\quad -B_1(s,t)+A_1(s,t,\lambda)=\lambda\int K(z,t,\lambda)\,B_1(s,z)\,dz,$$

$$(15)\quad =\lambda\int K(s,z,\lambda)\,B_1(z,t)\,dz.$$

Ces égalités montrent que, *dans les cas respectifs soit de* $p=0$, *soit de* $n=0$, si $B_1(s,t)$ est de la forme $B(s,t)$, $A_1(s,t,\lambda)$ sera de la forme $A(s,t,\lambda)$, ce qui démontre la proposition réciproque que nous avions en vue.

On arrive ainsi à la proposition suivante : *Pour que la résolvante* $K(s,t,\lambda)$ *de l'équation fonctionnelle de Fredholm de noyau* $K(s,t)$ *ait comme dérivée* $n^{ième}$ *par rapport à s la résolvante* $K_n(s,t,\lambda)$ *de l'équation fonctionnelle de Fredholm de noyau* $\frac{\partial^n K(s,t)}{\partial s^n}$, *il faut et il*

suffit que

$$(16)\qquad \int K(s,z)\left[K(z,t)-\frac{\partial^n K(z,t)}{\partial z^n}\right]dz$$
$$= s^{n-1}\mu_1(t)+s^{n-2}\mu_2(t)+\ldots+\mu_p(t),$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ *étant n fonctions arbitraires de t.*

Ces résultats obtenus, revenons à notre problème primitif, la résolution de l'équation fonctionnelle (2).

En dérivant les deux membres de cette équation n fois par rapport à s, et en posant

$$\psi(s)=\frac{\partial^n \varphi(s)}{\partial s^n},$$

on obtient

$$(17)\qquad \psi(s)-\lambda\int_a^b \frac{\partial^n K(s,t)}{\partial s^n}\psi(t)\,dt=\frac{\partial^n f(s)}{\partial s^n}.$$

Cette équation est une équation de Fredholm de noyau $\frac{\partial^n K(s,t)}{\partial s^n}$, dont la solution est

$$(18)\quad \psi(s)=\frac{\partial^n \varphi(s)}{\partial s^n}=\frac{\partial^n f(s)}{\partial s^n}+\lambda\int K_n(s,t,\lambda)\frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n}\partial t.$$

On en déduit immédiatement

$$(19)\quad \varphi(s)=f(s)+\lambda\underbrace{\int_0^s ds\int_0^s ds\ldots\int_0^s ds}_{n\text{ fois}}K_n(s,t,\lambda)\frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n}dt$$
$$+a_1 s^{n-1}+a_2 s^{n-2}+\ldots+a_n,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant des constantes qu'on déterminerait en substituant dans (1) la valeur (19) de $\varphi(s)$.

Cette détermination, qui donne la solution de (1) dans le cas général, est pénible. Elle devient toutefois très simple quand $K(s,t)$ satisfait à la condition (16).

Dans ce cas, en effet, (18) peut s'écrire

$$(20)\quad \frac{\partial^n \varphi(s)}{\partial s^n}=\frac{\partial^n f(s)}{\partial s^n}+\lambda\int\frac{\partial^n K(s,t,\lambda)}{\partial s^n}\,\frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n}dt,$$

et (19) s'écrit alors

$$(21)\qquad \varphi(s) = f(s) + \lambda \int K(s, t, \lambda) \frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n} dt + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_n,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant des constantes que nous nous proposons de déterminer.

Pour cela, remplaçons dans (1) $\varphi(s)$ par sa valeur (21); un leger changement de notation nous donne, en tenant compte de (16),

$$a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_n + \lambda \int \left\{ -K(s,t) + K(s,t,\lambda) - \lambda \int K(s,z) K(z,t,\lambda) dz \right\} \frac{\partial^n f(z)}{\partial z^n} dz = \lambda^2 \int \frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n} \times A(s, t, \lambda)\, dt,$$

avec

$$A(s, t, \lambda) = B(s, t) + \lambda \int K(z, t, \lambda) B(s, z)\, dz$$

et

$$B(s, t) = s^{n-1} \mu_1(t) + \ldots + \mu_m(t).$$

Le terme entre accolades $\{\ \}$ est nul en vertu de (2), et en identifiant, dans les deux membres, les coefficients des termes d'une même puissance de s, on obtient les égalités

$$(22)\qquad a_k = \lambda^2 \int_a^b \left\{ \mu_k(t) + \lambda \int_a^b K(z, t, \lambda) \mu_k(z) dz \right\} \frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n} dt,$$

avec

$$k = 1, 2, \ldots, n.$$

Les égalités (16), (21) et (22) résolvent le problème que nous nous étions proposé.

[L^1 19d, L^2 10g]

SUR LES CONIQUES ET LES QUADRIQUES HOMOFOCALES;

PAR M. L. QUANTIN DE LA ROËRE.

Soient d'une part un système de coniques homofocales et d'autre part un ensemble de droites satisfaisant toutes à une condition donnée, c'est-à-dire ayant une enveloppe. Chacune de ces droites est tangente à l'une des coniques; par son point de contact, menons la tangente à la conique d'espèce différente passant en ce point, nous formerons ainsi un deuxième ensemble de droites ayant aussi une enveloppe. Ces deux enveloppes se déduisent l'une de l'autre et de la relation qui les lie découle une remarque intéressante relative à un mode de génération de la développée d'une conique : cette développée est en effet l'enveloppe des polaires réciproques de la conique, prises par rapport à toutes les coniques qui lui sont homofocales. Réciproquement une conique est l'enveloppe des polaires réciproques de sa développée.

Des considérations analogues s'appliquent à un système de quadriques homofocales en faisant correspondre à un ensemble de plans les normales aux quadriques menées par chaque point de contact; on arrive comme corollaire à la proposition suivante : « La surface des centres principaux de courbure d'une quadrique est l'enveloppe des polaires réciproques de cette quadrique par rapport aux quadriques qui lui sont homofocales. » Mais ici il n'y a pas de réciproque.

I. — Coniques.

1. Un système de coniques homofocales rapportées à leurs axes communs est représenté par l'équation

$$(1) \qquad \frac{X^2}{A-\lambda} + \frac{Y^2}{B-\lambda} = 1.$$

A et B étant des constantes et λ un paramètre variable. On suppose que l'axe des X passe par les foyers. Si φ désigne la distance du centre à l'un des foyers, on a

$$(2) \qquad A - B = \varphi^2.$$

Une droite quelconque représentée par l'équation

$$(3) \qquad uX + vY = 1$$

est tangente à l'une des coniques λ du système; le point de contact a pour coordonnées

$$(3\,bis) \qquad x = u(A-\lambda), \qquad y = v(B-\lambda).$$

La tangente à la courbe de l'autre espèce passant en ce point est la perpendiculaire à la droite (3) en son point de contact; elle a ainsi pour équation

$$(4) \qquad vX - uY = uv\varphi^2.$$

Nous désignerons, pour abréger, les deux tangentes (3) et (4) sous le nom de *droites* ou *tangentes correspondantes*.

2. Lorsque les coefficients u et v des droites (3) et (4), au lieu d'être déterminés, sont simplement assujettis à vérifier une relation

$$(5) \qquad F(u, v) = 0,$$

on aura deux ensembles de droites.

Le premier ensemble formé par les droites (3) a une enveloppe dont l'équation s'obtient suivant la règle habituelle en éliminant u et v entre les relations suivantes :

$$(6)\qquad \begin{cases} uX + vY = 1, \\ Y\dfrac{\partial F}{\partial u} - X\dfrac{\partial F}{\partial v} = 0, \\ F(u, v) = 0. \end{cases}$$

Les droites (4) ont pour enveloppe la courbe représentée par l'équation résultant de l'élimination de u et v entre

$$(7)\qquad \begin{cases} vX - uY = uv\varphi^2, \\ \dfrac{u^2}{X}\dfrac{\partial F}{\partial u} + \dfrac{v^2}{Y}\dfrac{\partial F}{\partial v} = 0, \\ F(u, v) = 0. \end{cases}$$

L'équation tangentielle de l'enveloppe du premier ensemble (3) est l'équation (5). Pour les droites (4) l'enveloppe a pour équation tangentielle le résultat de la substitution dans (5) de $\frac{1}{u\varphi^2}$ et $-\frac{1}{v\varphi^2}$ à u et v; cette équation est donc

$$(8)\qquad F\left(\frac{1}{u\varphi^2}, -\frac{1}{v\varphi^2}\right) = 0.$$

3. L'enveloppe des droites (3) a une polaire réciproque par rapport à chacune des coniques (1); l'équation de cette polaire s'obtient comme on le sait en remplaçant, dans (5), u et v respectivement par $\frac{x}{A-\lambda}$ et $\frac{y}{B-\lambda}$; elle est donc représentée en coordonnées ponctuelles par

$$(9)\qquad F\left(\frac{x}{A-\lambda}, \frac{y}{B-\lambda}\right) = 0.$$

En faisant varier λ dans cette équation, on obtient

les polaires par rapport à toutes les coniques du système homofocal; on a ainsi une famille de courbes : leur enveloppe s'obtient en éliminant λ entre l'équation (9) et sa dérivée par rapport à ce paramètre. Pour simplifier l'écriture laissons dans (9) les variables primitives u et v qui sont des fonctions de λ définies par les relations (3 *bis*), l'enveloppe de ces courbes s'obtiendra donc en éliminant u, v et λ entre les quatre équations :

$$F(u, v) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \lambda} = 0,$$

$$u = \frac{x}{A - \lambda}, \qquad v = \frac{y}{B - \lambda}.$$

Éliminant λ entre les deux dernières, on trouve

$$vx - uy = uvz^2;$$

on en tire aussi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u^2}{x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v^2}{y}.$$

On voit qu'on retombe sur le groupe d'équations (7), dont la courbe obtenue n'est autre que l'enveloppe du second ensemble de droites. En raison de la réciprocité des deux ensembles de droites, il est évident qu'en opérant comme nous venons de le faire en partant du second ensemble, on arriverait à l'enveloppe du premier. Donc, en désignant pour abréger sous le nom de *courbes correspondantes* les enveloppes des deux ensembles, on aura la proposition suivante :

Chacune des courbes correspondantes est l'enveloppe des polaires réciproques de l'autre.

Il est aisé de voir que les développements qui précèdent s'appliquent, avec de légères modifications dans

les formules, à un système de paraboles ayant même foyer et même axe.

4. Considérons maintenant une conique quelconque, ellipse, hyperbole ou parabole, et d'autre part le système des coniques qui lui sont homofocales ; prenons la conique considérée pour enveloppe du premier ensemble de droites : chacune de ces dernières a pour correspondante la normale à cette conique au point où elle lui est tangente ; l'enveloppe du deuxième ensemble est donc l'enveloppe des normales de la conique, c'est-à-dire la développée de cette courbe. En appliquant à ce cas particulier la proposition précédente, nous avons le théorème déjà mentionné.

La développée d'une conique est l'enveloppe de ses polaires réciproques prises par rapport aux coniques qui lui sont homofocales, et réciproquement :

Une conique est l'enveloppe des polaires réciproques de sa développée, les polaires étant prises par rapport aux coniques homofocales à celle qui est donnée.

En effet, les tangentes de la développée ont pour droites correspondantes les tangentes de la conique.

Comme application, cherchons la développée de la conique

$$\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} = 1;$$

elle a pour équation tangentielle

$$Au^2 + Bv^2 = 1,$$

la polaire réciproque par rapport à une conique qui lui est homofocale est représentée par l'équation

$$\frac{Ax^2}{(A-\lambda)^2} + \frac{By^2}{(B-\lambda)^2} = 1,$$

λ étant le paramètre arbitraire. En dérivant par rapport à ce paramètre, il vient

$$\frac{Ax^2}{(A-\lambda)^3}+\frac{By^2}{(B-\lambda)^3}=0;$$

on a à éliminer λ entre ces deux équations; la seconde donne

$$\frac{B-\lambda}{A-\lambda}=-\frac{B^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}}{A^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}},$$

d'où

$$\frac{Ax^2}{(A-\lambda)^2}=\frac{1}{\varrho^{\frac{4}{3}}}\left(A^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}+B^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}\right)^2A^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}},$$

de même

$$\frac{By^2}{(B-\lambda)^2}=\frac{1}{\varrho^{\frac{4}{3}}}\left(A^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}+B^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}\right)^2B^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}.$$

Ajoutant membre à membre ces deux égalités, on arrive facilement à l'équation de la développée sous sa forme habituelle

$$A^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}+B^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}=\varrho^{\frac{4}{3}}.$$

On a immédiatement l'équation tangentielle de cette courbe en remplaçant dans celle de la conique u et v respectivement par $\frac{1}{u\varrho^2}$ et $-\frac{1}{v\varrho^2}$, ce qui donne

$$Bu^2+Av^2=\varrho^4u^2v^2$$

En partant de cette équation et opérant comme nous venons de le faire, on retrouve bien, pour l'enveloppe des polaires réciproques de cette développée, l'équation de la conique sous la forme ponctuelle, ce qui vérifie la réciproque de la proposition.

II. — Quadriques.

5. L'équation

$$(1)\qquad \frac{X^2}{A-\lambda}+\frac{Y^2}{B-\lambda}+\frac{Z^2}{C-\lambda}=1,$$

dans laquelle λ est un paramètre arbitraire et A, B, C des constantes, représente un système de quadriques homofocales. Nous supposons les axes disposés de telle sorte que $A > B > C$. En désignant par φ, φ_1, φ_2 les demi-distances focales des sections principales, on a

$$A - B = \varphi^2, \qquad A - C = \varphi_1^2, \qquad B - C = \varphi_2^2;$$

d'où

$$\varphi^2 - \varphi_1^2 + \varphi_2^2 = 0.$$

Un plan quelconque

$$(2) \qquad uX + vY + wZ = 1$$

est tangent à l'une des quadriques, λ en un point ayant pour coordonnées :

$$(3) \quad x = u(A - \lambda), \qquad y = v(B - \lambda), \qquad Z = w(C - \lambda).$$

La normale à la quadrique λ en ce point est la perpendiculaire au plan (2) ; on obtient d'ailleurs immédiatement ses équations en éliminant λ entre les trois égalités (3), puis en remplaçant dans le résultat x, y, z par les coordonnées courantes X, Y, Z. On trouve ainsi que cette normale est définie par les équations

$$(4) \qquad \begin{cases} vZ - wY = -vw\varphi_2^2, \\ wX - uZ = wu\varphi_1^2. \\ uY - vX = -uv\varphi^2. \end{cases}$$

Nous dirons que cette normale *correspond* au plan (u, v, w) et réciproquement ; dans ce qui suit nous désignerons sous le nom de *normale* une droite tangente à l'une quelconque des quadriques du système.

6. On voit par les équations (4) que les normales d'un système homofocales dépendent de trois paramètres u, v, w; leur ensemble forme ainsi un complexe.

Lorsque ces trois paramètres sont liés par une équation

$$(5) \qquad F(u, v, w) = 0,$$

les normales correspondantes ne dépendent plus que de deux paramètres; elles forment alors une congruence; mais cette dernière n'est pas en général ce qu'on nomme habituellement une *congruence de normales*, car les droites qui la composent ne sont pas en général toutes normales à une *même* surface.

En appliquant une règle connue, la *surface focale* de la convergence s'obtiendra en éliminant u, v, w entre les équations (4) des normales, la relation suivante

$$(6) \qquad \frac{u^2}{X}\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{v^2}{Y}\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{w^2}{Z}\frac{\partial F}{\partial w} = 0$$

et l'équation (5). Les coordonnées des deux points focaux situés sur chaque normale sont données par les équations (4) et la relation (6).

Les paramètres u, v, w des normales sont aussi les coordonnées des plans tangents correspondants de ces normales; par suite, l'équation (5) à laquelle doivent satisfaire ces paramètres est l'équation tangentielle de l'enveloppe de ces plans. Ainsi, établir une relation entre les paramètres des normales revient à donner une surface à laquelle tous les plans correspondants sont tangents.

7. La polaire réciproque de la surface (5) par rapport à l'une des quadriques du système a, comme on le sait, pour équation

$$(7) \qquad F\left(\frac{x}{A-\lambda}, \frac{y}{B-\lambda}, \frac{z}{C-\lambda}\right) = 0.$$

En faisant varier λ, on obtient une famille de sur-

faces à un seul paramètre; l'équation de son enveloppe est le résultat de l'élimination de λ entre l'équation (7) et sa dérivée par rapport à ce paramètre. En opérant d'une manière analogue à celle employée pour les coniques, on retrouve les formules (4), (6) et (5). Les opérations à effectuer sont donc les mêmes que celles relatives à la surface de la congruence. Ces deux surfaces sont donc identiques, d'où :

La surface focale d'une congruence de normales d'un système homofocal est l'enveloppe des polaires réciproques de la surface, enveloppe des plans correspondants de ces normales, ces polaires réciproques étant prises par rapport à toutes les quadriques du système.

De même que pour le cas des coniques, ce que nous venons de dire s'applique, sauf modifications dans les formules, à un système de paraboloïdes homofocaux; ce qui suit s'applique donc à une quadrique quelconque.

8. Supposons maintenant qu'on prenne, pour l'équation (5), l'équation tangentielle de l'une des quadriques du système homofocal, quadrique qui peut être considérée comme quelconque. Les normales correspondantes des plans tangents formeront l'ensemble des normales de cette quadrique (on a ainsi dans ce cas une véritable congruence de normales); la surface focale deviendra la surface des centres principaux de courbure. Donc :

La surface des centres principaux de courbure d'une quadrique est l'enveloppe des polaires réciproques de cette quadrique prises par rapport à toutes celles qui lui sont homofocales.

C'est la proposition énoncée au début. Ce théorème

est analogue à celui relatif aux coniques, mais il n'a pas de réciproque.

On déduit immédiatement du théorème qui précède l'équation tangentielle, bien connue d'ailleurs, de la surface des centres d'une quadrique :

Soit la quadrique

$$\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} = 1,$$

qui a pour équation tangentielle

$$A u^2 + B v^2 + C w^2 = 1.$$

Sa polaire réciproque par rapport à une quadrique homofocale est représentée par l'équation

$$\frac{A x^2}{(A-\lambda)^2} + \frac{B y^2}{(B-\lambda)^2} + \frac{C z^2}{(C-\lambda)^2} = 1,$$

qui, exprimée en coordonnées tangentielles, devient

$$\frac{(A-\lambda)^2}{A} u^2 + \frac{(B-\lambda)^2}{B} v^2 + \frac{(C-\lambda)^2}{C} w^2 = 1.$$

Développant cette équation par rapport au paramètre λ, il vient :

$$\left(\frac{u^2}{A} + \frac{v^2}{B} + \frac{w^2}{C}\right)\lambda^2 + 2(u^2 + v^2 + w^2)\lambda$$
$$+ A u^2 + B v^2 + C w^2 - 1 = 0.$$

L'enveloppe des courbes représentées par cette équation s'obtient, comme on le sait, en exprimant que cette équation du second degré en λ a ses deux racines égales. L'équation de la surface des centres est donc

$$(u^2 + v^2 + w^2)^2 = (A u^2 + B v^2 + C w^2 - 1)\left(\frac{u^2}{A} + \frac{v^2}{B} + \frac{w^2}{C}\right).$$

C'est la forme sous laquelle elle est généralement

connue; on peut l'écrire aussi en la développant

$$\frac{u^2}{A}+\frac{v^2}{B}+\frac{w^2}{C}=\frac{v^2w^2}{BC}\varphi_2^1+\frac{w^2u^2}{CA}\varphi_1^1+\frac{u^2v^2}{AB}\varphi_1^1.$$

CORRESPONDANCE.

M. M. O. — *Au sujet d'un article de M. Valiron.* — La construction du centre de courbure en un point d'une conique, donnée comme nouvelle dans le numéro de juin des *Nouvelles Annales* (p. 278), est celle que Mannheim a fait connaître dans son *Cours de Géométrie descriptive* (2e éd., p. 174), et que, d'ailleurs, l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* (édition française, tome III, vol. 3, fasc. 1, p. 139) signale comme ayant été donnée dès 1843 par Schellbach. Inutile d'ajouter que Mannheim n'avait nulle connaissance de l'écrit, tout à fait ignoré en France, de cet auteur allemand.

CERTIFICAT DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Montpellier.

Épreuve théorique. — *On donne la parabole dont le foyer est l'origine. Cette courbe reçoit un mouvement de translation, son axe restant ainsi parallèle à* Oy; *le foyer de la parabole décrivant la courbe représentée par l'équation*

$$y=\frac{x^3}{3\rho^2}-\frac{x^2}{2\rho}+\frac{2}{\rho}.$$

On demande : 1° *de déterminer l'enveloppe de ces paraboles mobiles;* 2° *étudier la forme de cette courbe enveloppe, montrer qu'elle a un point d'inflexion, et former l'équation de la tangente au point d'inflexion;* 3° *calculer l'aire comprise entre l'axe* Ox *et la partie de la courbe enveloppe située au-dessous de* Ox.

Épreuve pratique. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} + 4y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x}.$$

Déterminer les constantes d'intégration de façon que la courbe intégrale passe par le point $x = y = \frac{1}{3}$, *et que la tangente en ce point soit parallèle à l'axe* Ox.

(Juillet 1910.)

Épreuve théorique. — *On donne un cercle et un point* A *sur ce cercle. Former l'équation, en coordonnées cartésiennes et en coordonnées polaires, de la courbe* C, *lieu du point* M, *symétrique de* A *par rapport à une tangente quelconque au cercle donné :*

1° *Étudier la forme de cette courbe.*

2° *Calculer l'aire comprise à l'intérieur de la courbe* C.

3° *Sur la droite* AM, *on prend un point* M′ *tel que le produit* AM × AM′ *soit égal à un nombre fixe* K^2. *Trouver le lieu* C′ *du point* M′.

4° *Si l'on donne à* K *une valeur arbitraire variable, trouver les trajectoires orthogonales des courbes* C′.

Épreuve pratique. — *Les deux surfaces*

$$3xz = 2y^2 \qquad \text{et} \qquad 3y = x^2$$

se coupent suivant l'axe Oz *et une cubique.*

Déterminer, en un point quelconque de cette cubique, le centre de courbure, le rayon de courbure, et le rayon de torsion. (Novembre 1910.)

Épreuve théorique. — *En un point* M *de la parabole* $y^2 = 2px$, *on mène la normale* MN, *et une droite* MP, *qui forme avec la normale un triangle isoscèle* MNP, *dont la base* NP *est sur* OX; *de sorte que les angles* MNX′ *et* MPX *sont égaux :*

1° *Former l'équation de la droite* MP, *dans laquelle on remplacera l'abscisse* x *du point* M *par sa valeur* $x = \frac{y^2}{2p}$, *pour ne conserver qu'un seul paramètre variable* y.

2° *Lorsque* y *varie, déterminer l'enveloppe de la droite* MP.

Montrer que cette courbe enveloppe est tangente à la parabole aux deux points symétriques D, D *de coordonnées* $x = \frac{\rho}{2}$, $y = \pm \rho$, *et à l'axe des* x *au point* C *de coordonnées* $x = -\rho$, $y = 0$.

3° *Calculer la longueur des arcs symétriques de la courbe enveloppe, compris entre le point* C, *et les points* D *et* D'.

4° *Calculer l'aire limitée par ces arcs de courbe et la droite* DD'.

Épreuve pratique. — *Déterminer l'intégrale générale de l'équation différentielle*

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 5\frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = 4x + 2.$$

Déterminer l'intégrale particulière qui s'annule, ainsi que sa dérivée, pour les deux valeurs $x = \pm \frac{\pi}{2}$.

(Juillet 1911.)

SOLUTION DE QUESTION PROPOSÉE.

2097.

(1908, p. 384.)

Étant donnés, dans un plan, un cercle et un point H, *on considère tous les triangles qui ont pour orthocentre le point* H *et dont un côté est un diamètre* MM' *du cercle :*

1° *Trouver le lieu du troisième sommet* P ;

2° *Trouver l'enveloppe* (E) *des droites* PM, PM'. *Les points de contact de ces droites avec l'enveloppe étant* N *et* N', *faire voir que la droite* NN' *passe en* H *et est parallèle à* MM' ;

3° *Le cercle circonscrit au triangle* PMM' *passe par deux points fixes; il en est de même du cercle des neuf points. Les pieds des hauteurs du triangle* PMM' *étant* K *sur* MM', I *sur* PM, I' *sur* PM', *la droite* II' *passe par un point fixe.*

4° *La conique de foyer* H *inscrite au triangle* PMM' *est*

tangente à deux droites fixes; son petit axe a une longueur constante. G. FONTENÉ.

DEUXIÈME SOLUTION [1].

Par l'AUTEUR.

1. Pour les deux premières Parties, il n'y a qu'à se reporter à la solution donnée précédemment (1909, p. 187); on peut seulement observer que la droite Δ est la directrice pour le foyer H, ce qui explique pourquoi la droite NN', polaire du point P situé sur cette directrice, passe par le foyer H et est parallèle à la droite MM' perpendiculaire à PH.

Pour la troisième Partie, d'une part, le cercle de diamètre PH' passe aux points M, M', h, de sorte que le cercle circonscrit PMM' passe par les points fixes H' et h; d'autre part, le cercle des neuf points, ayant pour diamètre la droite qui joint le milieu O de MM' au milieu de PH, passe au point O et au milieu ω du segment Hh; ces deux faits sont d'ailleurs liés par l'homothétie du cercle circonscrit et du cercle des neuf points $\left(\text{centre d'homothétie H, rapport } \frac{1}{2}\right)$. — La droite H' porte la corde commune au cercle fixe O et au cercle des neuf points; comme celui-ci passe par deux points fixes O et ω, la droite H' passe par un point fixe i, situé sur Oω. Si l'on considère en particulier le cercle des neuf points qui a pour diamètre Oω, on voit que le point i est sur la polaire de ω par rapport au cercle O.

Pour la quatrième Partie, on se reportera également à la solution déjà donnée.

2. On a rencontré le fait suivant : *si, aux extrémités* N *et* N' *d'une corde focale d'une conique, on mène les tangentes jusqu'à leurs rencontres en* M *et* I, M' *et* I', *avec le cercle principal,* M *et* M' *étant les projections du second foyer sur les tangentes,* I *et* I' *étant les projections du foyer par lequel passe la corde, la droite* MM' *est un diamètre du cercle principal, parallèle à la corde focale, la droite* II' *passe par un point fixe* (*Cf.* KŒHLER, *Exercices*, p. 109). Le fait que les deux points M et I se séparent a lieu

[1] Voir une première solution, 1909, p. 186.

en vertu du double contact de la conique et du cercle principal; le fait que MM′ et H′ passent par deux points fixes s'explique comme il suit :

Dans une *corrélation générale*, un point A ayant pour transformée une droite b, de sorte que la droite b a pour point primitif le point A, si le point A décrit une droite a, la droite transformée b passe par un point fixe B, et l'on dira que ce point B est le transformé de la droite b, ou encore que la droite b est la droite primitive du point B :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{point A, droite transformée } b,\\ \text{droite } a\text{, point transformé B,}\\ \text{si A décrit } a,\ b \text{ passe par B;}\end{array}\right.$$

un point a une droite transformée et une droite primitive, ... Deux points M et M′ sont conjugués, dans cet ordre, si la transformée de M passe en M′, auquel cas la primitive de M′ passe en M; on définit d'une manière analogue deux droites conjuguées. Le lieu des points qui sont conjugués d'eux-mêmes est une conique S, l'enveloppe des droites qui sont conjuguées d'elles-mêmes est une conique Σ, et ces deux coniques sont bitangentes.

Une corrélation générale dépend de huit paramètres et se trouve déterminée par la connaissance des deux coniques S et Σ. Si l'on prend comme conique S le cercle donné, comme conique Σ l'enveloppe (E) obtenue, la droite transformée du point P est la droite MM′, la droite primitive étant la droite H′ (ou inversement, mais peu importe ici); la construction générale dont on a ici un exemple est due à Schröter; je l'ai retrouvée en 1892. (L'Hyperespace, *Propriétés métriques de la corrélation générale*, p. 47.) Dès lors, le point P décrivant la droite Δ, la droite MM′ passe par un point fixe O; la droite H′ passe également par un point fixe i.

ERRATA.

1911, page 347, ligne 12, *lire :* Si $D_{5,5}$, $D_{5,4}$ et $D_{5,3}$ sont nuls.

1911, page 349, lignes 4 et 3 en remontant, *lire :* $a^2d^2+\ldots$ et $a^3e^3+\ldots$.

[C2a]

SUR L'INTÉGRATION DES FRACTIONS RATIONNELLES [1];

PAR M. G. FONTENÉ.

I. — RECHERCHE DIRECTE DE LA PARTIE ALGÉBRIQUE.

a. — Généralités.

1. Soit $\frac{f(x)}{F(x)}$ une fraction rationnelle irréductible, sans partie entière. Pour établir que la partie algébrique de l'intégrale $\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx$ peut s'obtenir indépendamment de la connaissance des racines de l'équation $F(x) = 0$, ce qui est d'ailleurs un fait bien connu, on peut raisonner comme il suit :

Soit

$$F(x) = X^4 Y^3 Z^2 T,$$

chacun des polynomes X, Y, Z, T n'ayant que des racines simples.

On veut avoir

$$\int \frac{f}{X^4 Y^3 Z^2 T}\,dx = \frac{\varphi}{X^3 Y^2 Y} + \int \frac{\omega}{XYZT}\,dx,$$

le degré du polynome φ étant inférieur d'une unité au degré du polynome $X^3 Y^2 Z$; et l'on sait que cela n'est possible que d'une façon. Il existe donc un polynome φ,

[1] Je signale comme résultat essentiel de ce Mémoire la détermination effective de la partie algébrique de l'intégrale $\int \frac{1}{X^2}\,dx$, où X est un polynome du 4e degré; *voir* les formules (C) et (C').

et un seul, de degré inférieur au degré du polynome $X^2 Y^3 Z$, satisfaisant à l'identité *algébrique* qu'on déduit de l'égalité précédente par dérivation; la détermination de ce polynome se fait donc par un calcul du premier degré, et le fait annoncé est ainsi établi.

2. L'identité en question est

$$\frac{f}{X^4 Y^3 Z^2 T} = -\frac{3X'YZ + 2Y'XZ + Z'XY}{X^4 Y^3 Z^2}\varphi + \frac{\varphi'}{X^3 Y^2 Z} + \frac{\omega}{XYZT},$$

ou

$$f + (3X'YZ + 2Y'XZ + Z'XY)T\varphi - XYZT\varphi' = X^3 Y^2 Z\omega.$$

Cette identité exprime, en ce qui concerne le polynome φ, que le premier membre est divisible par $X^3 Y^2 Z$; il se trouve naturellement que le polynome φ dépend, d'après son degré, de paramètres en nombre égal à celui des conditions auxquelles il faut satisfaire, et le mécanisme de la division montre que ces conditions sont du premier degré par rapport aux paramètres en question; mais, dans cet ordre d'idées, il faudrait faire voir que le problème n'est ni impossible, ni indéterminé.

3. L'identité ci-dessus renferme les seuls polynomes

$$X^3 Y^2 Z, \quad (X^3 Y^2 Z)' : X^2 Y, \quad XYZT, \quad T;$$

si donc on voulait l'employer à la détermination du polynome φ, en partant du polynome $F(x)$, on n'aurait à faire qu'une partie du calcul relatif à la recherche des polynomes X, Y, Z, T, à savoir ce qui concerne la recherche du polynome T; cela résulte du Tableau

suivant :

$$(a) \qquad X^4 Y^3 Z^2 T, \quad X^3 Y^2 Z, \quad X^2 Y,$$
$$(b) \qquad XYZT, \quad XYZ.$$
$$(c) \qquad T.$$

4. Si l'on a simplement

$$F(x) = X^2 Y,$$

l'identité ci-dessus se réduit à

$$f + X'Y\varphi - XY\varphi' = X\omega;$$

le polynome X doit alors diviser le polynome

$$f + X'Y\varphi.$$

Si l'on veut faire le calcul par cette méthode, on mettra le polynome f sous la forme

$$f \equiv -X'Y\varphi + X\psi,$$

et l'on doit observer à ce propos que les deux polynomes $X'Y$ et X sont premiers entre eux; on aura, d'ailleurs,

$$\omega = -Y\varphi' + \psi.$$

[Bien entendu, si l'on écrit, pour faire un calcul inverse,

$$\int \frac{f}{X^2 Y}\,dx = \int \frac{-X'}{X^2}\varphi\,dx + \int \frac{\psi}{XY}\,dx$$
$$= \int \varphi\, d\left(\frac{1}{X}\right) + \int \frac{\psi}{XY}\,dx,$$

on a à faire une intégration par parties, correspondant à la dérivation du produit $\varphi \times \frac{1}{X}$ dans le calcul tel qu'il a été fait précédemment, et l'on obtient

$$\int \frac{f}{X^2 Y}\,dx = \frac{\varphi}{X} + \int \frac{-Y\varphi' + \psi}{XY}\,dx.\Big|$$

Si l'on suppose $f = 1$, c'est-à-dire si l'on considère l'intégrale $\int \frac{1}{X^2 Y} dx$, on devra avoir

$$1 = -X'Y\varphi + X\psi;$$

les degrés des polynomes X et Y étant m et n, le polynome φ devra être de degré $m - 1$; le polynome ψ sera alors du degré $m + n - 2$, et le degré du polynome ω sera également $m + n - 2$, au lieu de $m + n - 1$.

b. — Applications.

5. Appliquons cette méthode à l'intégrale

$$\int \frac{1}{X^2} dx,$$

X n'ayant que des racines simples. On doit déterminer les polynomes φ et ψ, de degrés $m - 1$ et $m - 2$, d'après l'identité

$$1 \equiv -X'\varphi + X\psi.$$

Si l'on prend d'abord

$$X = ax^2 + 2bx + c,$$
$$X' = 2(ax + b),$$

on a l'identité

$$2\Delta \equiv -X'(ax + b) + X.2a;$$

on a, par suite,

$$2\Delta\varphi = ax + b, \qquad 2\Delta\psi = 2a,$$

et, comme ω est ici $-\varphi' + \psi$,

$$2\Delta\omega = a.$$

On a donc

$$(\mathrm{A}) \qquad 2\int \frac{\Delta}{X^2}\,dx = \frac{ax+b}{X} + \int \frac{a}{X}\,dx.$$

6. Soit maintenant

$$X = ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d,$$

d'où

$$X' = 3(ax^2 + 2bx + c).$$

Pour satisfaire à l'identité

$$1 \equiv -X'\varphi + X\psi,$$

j'emploierai une méthode que j'ai indiquée ailleurs. Le résultant des polynomes X et X′, ou le discriminant de X, est, d'après Sylvester, le quotient par a de l'expression

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & 3b & 3c & d & 0 \\ 0 & a & 3b & 3c & d \\ a & 2b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & 2b & c & 0 \\ 0 & 0 & a & 2b & c \end{vmatrix}.$$

Si l'on remplace chaque élément de la dernière colonne par la somme des produits obtenus en multipliant les éléments corespondants des colonnes successives par x^4, x^3, x^2, x, 1, on a

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & 3b & 3c & d & xX \\ 0 & a & 3b & 3c & X \\ a & 2b & c & 0 & \frac{1}{3}x^2X' \\ 0 & a & 2b & c & \frac{1}{3}xX' \\ 0 & 0 & a & 2b & \frac{1}{3}X' \end{vmatrix},$$

les polynomes de la dernière colonne étant les poly-

nomes de Sylvester; on a, par suite,

$$3\Delta_1 \varphi = -\begin{vmatrix} a & 3b & 3c & d & 0 \\ 0 & a & 3b & 3c & 0 \\ a & 2b & c & 0 & x^2 \\ 0 & a & 2b & c & x \\ 0 & 0 & a & 2b & 1 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 \psi = \begin{vmatrix} a & 3b & 3c & d & x \\ 0 & a & 3b & 3c & 1 \\ a & 2b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & 2b & c & 0 \\ 0 & 0 & a & 2b & 0 \end{vmatrix},$$

et, comme ω est ici $-\varphi' + \psi$,

$$3\Delta_1 \omega = \begin{vmatrix} a & 3b & 3c & d & 3.x \\ 0 & a & 3b & 3c & 3.1 \\ a & 2b & c & 0 & 2x \\ 0 & a & 2b & c & 1 \\ 0 & 0 & a & 2b & 0 \end{vmatrix}.$$

Le discriminant Δ est $\Delta_1 : a$; les trois déterminants ci-dessus sont également divisibles par a. On a ainsi, après avoir retranché, dans chaque déterminant, la première ligne de la troisième, et la seconde de la quatrième,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 3b & 3c & d \\ -b & -2c & -d & 0 \\ 0 & -b & -2c & -d \\ 0 & a & 2b & c \end{vmatrix},$$

$$3\Delta \varphi = -\begin{vmatrix} a & 3b & 3c & 0 \\ -b & -2c & -d & x^2 \\ 0 & -b & -2c & x \\ 0 & a & 2b & 1 \end{vmatrix},$$

$$3\Delta \omega = \begin{vmatrix} a & 3b & 3c & 3.1 \\ -b & -2c & -d & -x \\ 0 & -b & -2c & -2.1 \\ 0 & a & 2b & 0 \end{vmatrix}.$$

On a alors

$$3\int \frac{\lambda}{X^2}\,dx$$
$$= \frac{-2a(ac-b^2)x^2+(a^2d-7abc+6b^3)x+(abd+3b^2c-4ac^2)}{X}$$
$$+2\int \frac{-a(ac-b^2)x+(a^2d-4abc+3b^3)}{X}\,dx.$$

7. Pour un polynome du 4e degré

$$X = ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e,$$

il convient de conduire le calcul comme il suit. Nous poserons

$$U = ax+b,$$

ce qui donne, en remplaçant x par $\frac{-b}{a}+\frac{U}{a}$,

$$a^3X = U^4+6\gamma U^2+4\delta U+\varepsilon,$$

sans terme en U^3, avec

$$\gamma = a.c-b^2,$$
$$\delta = a^2.d-3ab.c+2b^3,$$
$$\varepsilon = a^3.e-4a^2b.d+6ab^2.c-3b^4;$$

les quatre quantités a, γ, δ, ε forment un système complet de semi-invariants pour le polynome X (*voir* une Note précédente, 1911, p. 337). Toutefois, nous n'emploierons pas ε, mais bien les invariants

$$S = ae-4bd+3c^2,$$
$$T = ace+2bcd-ad^2-eb^2-c^3,$$

qui contiennent e; les cinq quantités

$$a,\quad \gamma,\quad \delta,\quad S,\quad T,$$

dont nous nous servirons, sont alors liées par la

relation

$$a^2(\gamma S - aT) = 4\gamma^3 + \delta^2,$$

qui résulte de l'élimination de ε entre les égalités

$$a^2 S = \varepsilon + 3\gamma^2, \qquad a^3 T = \gamma\varepsilon - \delta^2 - \gamma^3,$$

fournies par la considération du polynome en U; dans les calculs, on remplacera δ^2 par l'expression

$$\delta^2 = a^2(\gamma S - aT) - 4\gamma^3.$$

Nous écrirons

$$a^3 X = U^4 + 6\gamma U^2 + 4\delta U + (a^2 S - 3\gamma^2);$$

on a encore

$$a^2 X_1 = U^3 + 3\gamma U + \delta,$$

la dérivée de X par rapport à x étant $4X_1$.

Le discriminant du polynome X est

$$\Delta = S^3 - 27T^2.$$

En désignant par H le hessien, le coefficient de x^4 dans le covariant bien connu $2S.H - 3T.X$ est la quantité $\theta = 2\gamma S - 3aT$, que nous rencontrerons par la suite.

Cela posé, en supposant pour le moment $a = 1$, on a

$$4\int \frac{\Delta}{X^2}\,dx = 4\int \frac{\Delta}{(U^4 + 6\gamma U^2 + \ldots)^2}\,dU,$$

et Δ est aussi le discriminant du polynome $U^4 + \ldots$

Or, on aurait, avec x et a, b, c, d, e,

$$4\Delta\varphi = -\begin{vmatrix} a & 4b & 6c & 4d & 0 & 0 \\ 0 & a & 4b & 6c & 4d & 0 \\ -b & -3c & -3d & -e & 0 & x^3 \\ 0 & -b & -3c & -3d & -e & x^2 \\ 0 & 0 & -b & -3c & -3d & x \\ 0 & 0 & a & 3b & 3c & 1 \end{vmatrix},$$

$$4\Delta\omega = \begin{vmatrix} a & 4b & 6c & 4d & 0 & 4.x \\ 0 & a & 4b & 6c & 4d & 4.1 \\ -b & -3c & -3d & -e & 0 & -x^2 \\ 0 & -b & -3c & -3d & -e & -2.x \\ 0 & 0 & -b & -3c & -4d & -3.1 \\ 0 & 0 & a & 3b & 3c & 0 \end{vmatrix}.$$

En remplaçant x et a, b, c, d, e par U et 1, 0, γ, δ, $S - 3\gamma^2$, on obtient

$$4\Delta\varphi = -\begin{vmatrix} -3\delta & 21\gamma^2 - S & 12\gamma\delta & U^3 \\ -3\gamma & -3\delta & 3\gamma^2 - S & U^2 \\ 0 & -3\gamma & -3\delta & U \\ 1 & 0 & 3\gamma & 1 \end{vmatrix},$$

$$4\Delta\omega = \begin{vmatrix} -3\delta & 21\gamma^2 - S & 12\gamma\delta & -U^2 + 12\gamma \\ -3\gamma & -3\delta & 3\gamma^2 - S & -2.U \\ 0 & -3\gamma & -3\gamma & -3.1 \\ 1 & 0 & 3\gamma & 0 \end{vmatrix}.$$

Si l'on développe ces déterminants en tenant compte de l'expression de δ^2 donnée ci-dessus, et si l'on rétablit a, en rendant la formule homogène en a, b, c, d, e, on a

$$4\int \frac{\Delta}{X^2}\,dx$$
$$= \frac{30U^3 - 3\delta S U^2 - (a^2S^2 - 63x\gamma T + 30\gamma^2 S)U - 9\delta(\gamma S - 3aT)}{a^2 X}$$
$$+ 3\int \frac{9U^2 - 2\delta S U + (a^2S^2 - 27a\gamma T + 6\gamma^2 S)}{aX}\,dx.$$

Si l'on remplace U par $ax + b$, les quotients par a^2 et a des numérateurs des deux fonctions sont

$$\begin{aligned}&3a(2\gamma S - 3aT)x^3 - 3[(a^2d - 9abc + 8b^3)S + 9abT]x^2\\&\quad + [(a^2e - 10abd + 33ac^2 - 24b^2c)S - 9(7ac - 4b^2)T]x\\&\quad + [(abe + 9acd + 6bc^2 - 16b^2d)S - 9(3ad - 2bc)T],\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&a(2\gamma S - 3aT)x^2 - 2[(a^2d - 5abc + 4b^3)S + 3abT]x\\&\quad + [(a^2e - 6abd + 9ac^2 - 4b^2c)S - 3(9ac - 8b^2)T].\end{aligned}$$

8. On aurait pu procéder d'une manière analogue pour le cas du 3e degré. Les semi-invariants sont

$$\gamma = ac - b^2,$$
$$\delta = a^2d - 3ab + 2b^3,$$

et l'on a

$$a^2X = U^3 + 3\gamma U + \delta,$$
$$a\,X_1 = U^2 + \gamma,$$

la dérivée de X par rapport à x étant $3X_1$. Le discriminant est

$$\Delta = a^2d^2 + 4ac^3 - 6abcd + 4b^3d - 3b^2c^2;$$

le polynome en U donne

$$a^2\Delta = \delta^2 + 4\gamma^3.$$

On trouve

$$(B)\quad 3\int\frac{\Delta}{X^2}dx = \frac{-2\gamma U^2 + \delta U - 4\gamma^2}{aX} + 2\int\frac{-\gamma U + \delta}{X}dx.$$

c. — Transformation des formules.

9. Relativement à la formule (B), si l'on divise le polynome $-2\gamma U^2 + \ldots$ par le polynome

$$2(-\gamma U + \delta),$$

on a

$$2\gamma(-2\gamma U^2+\ldots) = 2(-\gamma U+\delta)(2\gamma U+\delta) - 2a^2\Delta$$
$$= 2Z.aY - 2a^2\Delta,$$

en posant

$$Z = -\gamma U + \delta,$$
$$aY = 2\gamma U + \delta.$$

On a ainsi

$$(B') \qquad 3\int \frac{\Delta}{X^2}\,dx = \frac{2Z.Y - 2a\Delta}{2\gamma.X} + \int \frac{2Z}{X}\,dx,$$

2γ étant le coefficient de U dans aY.

Pour $\Delta = 0$, cela donne

$$\frac{Z.Y}{2\gamma.X} + \int \frac{Z}{X}\,dx = 0;$$

on doit donc avoir dans cette hypothèse

$$kX = Y^2Z,$$

car cela donnera le résultat exact

$$\frac{1}{2\gamma.Y} + \int \frac{1}{Y^2}\,dx = 0,$$

2γ étant le coefficient de x dans Y.

Et en effet, si, en dehors de l'hypothèse $\Delta = 0$, on effectue les opérations qui concernent la recherche du plus grand commun diviseur entre le polynome X et sa dérivée débarrassée du facteur 3, soit X_1, on obtient comme reste du premier degré le polynome Y. Le polynome Z est, à un facteur constant près, le quotient entier de la division du polynome X par Y^2, et l'on a

$$4\gamma^3 X = -Y^2Z + \Delta(3\gamma U + \delta).$$

L'hypothèse $\Delta = 0$ donne bien $kX = Y^2Z$.

Observons que, si l'on ordonne Y par rapport à x,

on a

$$Y = 2(ac - b^2)x + (ad - bc);$$

c'est la dérivée du hessien, comme on devait s'y attendre.

10. Pour un polynome du 4e degré, si l'on divise le polynome $3\theta U^3 - 3\delta SU^2 + \ldots$ de la formule (C) par le polynome $3(\theta U^2 - 2\delta SU + \ldots)$, on a

$$\begin{aligned}\theta(3\theta U^3 - 3\delta SU^2 + \ldots) &= 3(\theta U^2 - 2\delta SU + \ldots)(\theta U + \delta S)\\ &\quad + a^2\Delta(2\gamma U - 3\delta)\\ &= 3aZ.aY + a^2\Delta(2\gamma U - 3\delta),\end{aligned}$$

en posant

$$\begin{aligned}aZ &= \theta U^2 - 2\delta SU + (a^2S^2 - 27a\gamma T + 6\gamma^2 S),\\ aY &= \theta U + \delta S.\end{aligned}$$

On a ainsi

$$(C') \quad 4\int \frac{\Delta}{X^2}\,dx = \frac{3Z.Y + \Delta(2\gamma U - 3\delta)}{\theta X} + \int \frac{3Z}{X}\,dx.$$

Ici encore, pour $\Delta = 0$, on doit avoir $kX = Y^2Z$; mais les choses ne sont plus tout à fait aussi simples que dans le cas précédent. Si, en dehors de l'hypothèse $\Delta = 0$, on effectue les opérations qui concernent la recherche du plus grand commun diviseur entre le polynome X et sa dérivée X_1 débarrassée du facteur ζ, on obtient bien comme reste du 1er degré le polynome Y. Mais Z est cette fois, à un facteur constant près, le quotient entier de la division de X par $Y_2 + \gamma\Delta$, et voici comment on peut le reconnaître.

Si l'on commence la division du polynome X par Y^2, *en se bornant aux termes en* U^2 *et en* U *dans le quotient*, on a

$$\theta^3 a^3 X = a^2 Y^2(\theta U^2 - 2\delta SU) + \theta(6\theta^2\gamma + 3\delta^2 S^2)U^2 + \lambda U + \mu.$$

Il faut observer ici que l'expression

$$(6\theta^2\gamma + 3\delta^2 S^2) - a^2\gamma\Delta$$

est divisible par θ, car elle devient

$$6\theta^2\gamma + a^2 S^2(2\gamma S - 3aT) - 3\gamma(4\gamma^2 S^2 - 9a^2 T^2).$$

ou

$$6\theta^2\gamma + \theta[a^2 S^2 - 3\gamma(2\gamma S + 3aT)],$$

ou

$$\theta(a^2 S^2 - 27a\gamma T + 6\gamma^2 S);$$

on a donc, en désignant par k la quantité qui multiplie θ,

$$\begin{aligned}\theta^3 a^3 X &= a^2 Y^2(\theta U^2 - 2\delta SU) + (\theta^2 k + \theta a^2\gamma\Delta)U^2 + \ldots \\ &= a^2(Y^2 + \gamma\Delta)(\theta U^2 - 2\delta SU + k) + \lambda' U + \mu',\end{aligned}$$

ou

$$\theta^3 X = (Y^2 + \gamma\Delta)Z + \lambda'' U + \mu''.$$

On trouve d'ailleurs que le reste $\lambda'' U + \mu''$ est

$$\Delta[4\delta T.U + (a^2 ST - 2a\gamma S^2 - 24\gamma^2 T)],$$

de sorte que l'hypothèse $\Delta = 0$ donne bien $kX = Y^2 Z$.

Si l'on ordonne Y par rapport à x, on a

$$\begin{aligned}Y &= (2\gamma S - 3aT)x + [(ad - bc)S - 3bT] \\ &= S[2(ac - b^2)x + (ad - bc)] - 3T(ax + b);\end{aligned}$$

j'ai fait observer ailleurs que ce polynome est le quotient par 24 de la dérivée troisième du covariant $2S.H - 3T.X$.

d. — Extension d'un résultat.

11. Dans le cas d'un polynome du 3e degré, si l'on suppose $a = 1$, $b = 0$, de sorte que U se confond avec x,

on a, en remplaçant c et d par p et q,

$$\gamma = p, \qquad \delta = q, \qquad \Delta = q^2 + 4p^3,$$
$$X = x^3 + 3px + q,$$
$$Y = 2px + q,$$
$$Z = -px + q,$$
$$3\int \frac{\Delta}{X^2}\,dx = \frac{-2px^2 + qx - 4p^2}{X} + 2\int \frac{-px + q}{X}\,dx.$$

Pour un polynome du 4e degré, l'expression de $a^3 X$ au moyen de U conduit à considérer le cas particulier $\gamma = 0$. On a alors

$$S = ac + 3c^2,$$
$$T = 2bcd - ad^2 - c^3,$$
$$\delta = a^2 d - b^3,$$
$$\theta = -3aT,$$
$$a^3 X = U^4 + 4\delta U + a^2 S,$$
$$aY = -3aT.U + \delta S,$$
$$aZ = -3aT.U^2 - 2\delta S.U + a^2 S^2,$$

et, à cause de $\gamma = 0$, Z est le quotient entier de la division du polynome $\theta^3 X$ par Y^2; le polynome $3\theta U^3 - \ldots$ de la formule (C) se réduit à

$$-9aT.U^3 - 3\delta S.U^2 + a^2 S^2.U - 27a\delta T.$$

Si l'on suppose, en outre, $a = 1$, $b = 0$, de sorte que U se confond avec x, on a, en remplaçant d et e par p et q,

$$c = 0, \qquad \delta = p, \qquad S = q, \qquad T = -p^2, \qquad \theta = 3p^2,$$
$$X = x^4 + 4px + q,$$
$$Y = p(3px + q),$$
$$Z = 3p^2x^2 - 2pqx + q^2,$$
$$4\int \frac{\Delta}{X^2}\,dx = \frac{9p^2x^3 - 3pqx^2 + q^2x + 27p^3}{X}$$
$$+ 3\int \frac{3p^2x^2 - 2pqx + q^2}{X}\,dx.$$

12. On peut étendre ces derniers résultats. Si l'on remarque que le polynome Z relatif au cas où X est du 3e degré peut être défini par la relation

$$\delta^2 X - \Delta U^3 + Y^2 Z,$$

on est mis sur la voie du résultat suivant que je me borne à indiquer :

Soit le polynome

$$X = x^{m+1} + (m+1)px + q;$$

si l'on effectue les opérations qui concernent la recherche du plus grand commun diviseur entre ce polynome et sa dérivée, on a immédiatement le reste du premier degré

$$Y = mpx + q,$$

et le discriminant

$$\Delta = q^m + (-1)^m m^m p^{m+1};$$

la relation

$$q^m X - \Delta x^{m+1} + Y^2 Z,$$

ou

$$(-1)^{m+1} m^m p^{m+1} x^{m+1} + (m+1) p q^m x + q^{m+1}$$
$$= (mpx + q)^2 Z$$

définit alors un polynome Z entier en X.

Cela posé, on a la formule

$$(m+1)\int \frac{\Delta}{X^2}\,dx = \frac{YZ - \Delta}{pX} + m\int \frac{Z}{X}\,dx.$$

J'indiquerai la loi de formation du polynome Z en donnant sa valeur pour $m + 1 = 7$; on a alors

$$Z = -6^4 p^5 x^5 + 2.6^3 p^4 q x^4 - 3.6^2 p^3 q^2 x^3$$
$$+ 4.6 p^2 q^3 x^2 - 5.pq^4 x + q^5,$$

le dernier terme ayant une loi de formation spéciale.

Quant au polynome $\frac{YZ - \Delta}{p}$, sa valeur est, dans le

même cas,

$$\frac{YZ - \Delta}{p} = -6^5 p^5 x^6 + 6^4 p^4 q x^5 - 6^3 p^3 q^2 x^4 + 6^2 p^2 q^2 x^3 - 6 p q^4 x^2 + q^5 x + (-1)^7 6^6 p^6.$$

Pour comparer le résultat actuel à ceux déjà obtenus ($m = 2$, $m = 3$), on doit observer que les discriminants des formules (A), (B), (C) sont ici

$$ac - b^2 = q - p^2,$$
$$(\delta^2 + 4\gamma^3) : a^2 = q^2 + 4p^3,$$
$$S^3 - 27 T^2 = q^3 - 28 p^4,$$

de sorte qu'ils sont identiques à ceux que définit la formule ci-dessus [1].

II. — Recherche directe de la partie transcendante.

13. En supposant que la fraction rationnelle a d'abord été mise sous la forme d'une somme de fractions de la forme $\frac{f}{X^{m+1}}$, on a à considérer l'intégrale

$$\int \frac{f}{X^{m+1}} dx,$$

le polynome X n'ayant que des racines simples. Nous chercherons cette fois directement la partie transcendante de cette intégrale.

14. Voyons d'abord à quelles conditions cette intégrale est purement algébrique ; le nombre de ces conditions est égal au degré du polynome X.

---

[1] Les discriminants des formules (A), (B), (C) sont, au point de vue du signe, ceux qui se trouvent définis dans une Note précédente (1911, p. 348), et qui contiennent respectivement les termes ac, $a^2 d^2$, $a^3 e^3$.

On veut avoir, par exemple,

$$\int \frac{f}{X^4}\,dx = \frac{\varphi}{X^3}.$$

On en déduit, par quatre dérivations successives,

$$\begin{aligned}
&f + 3X'\varphi - X\varphi' = 0,\\
&f' + 3X''\varphi + 2X'\varphi' - X\varphi'' = 0,\\
&f'' + 3X'''\varphi + 5X''\varphi' + X'\varphi'' - X\varphi''' = 0,\\
&f''' + 3X^{\text{iv}}\varphi + 8X'''\varphi' + 6X''\varphi'' - X\varphi^{\text{iv}} = 0,
\end{aligned}$$

le coefficient d'un terme qui n'est ni le premier, ni le second, ni le dernier dans la ligne où il se trouve, étant la somme du coefficient du terme placé au-dessus de lui et du coefficient du terme placé à gauche de celui-là. Les coefficients des avant-derniers termes sont successivement 3, 2, 1, 0, de sorte que *la dérivée* φ''', *tout aussi bien que la dérivée* φ^{iv}, *ne figure dans les identités ci-dessus que multipliée par le facteur* X. Éliminons alors les trois polynomes φ, φ', φ'' entre ces quatre identités ; nous avons l'identité

$$\begin{vmatrix}
f & 3X' & -X & 0\\
f' & 3X'' & 2X' & -X\\
(f'' - X\theta''') & 3X''' & 5X'' & X'\\
(f''' - X\theta^{\text{iv}}) & 3X^{\text{iv}} & 8X''' & 6X''
\end{vmatrix} = 0,$$

de laquelle il résulte que le polynome

$$\begin{vmatrix}
f & 3X' & 0 & 0\\
f' & 3X'' & 2X' & 0\\
f'' & 3X''' & 5X'' & X'\\
f''' & 3X^{\text{iv}} & 8X''' & 6X''
\end{vmatrix}$$

doit être divisible par X.

On a ainsi des conditions en nombre égal au nombre des conditions requises. Nous désignerons par P ce polynome.

Dans le cas général, la première ligne du déterminant est

$$f, \quad mX', \quad 0, \quad 0, \quad \ldots, \quad 0;$$

dans la dernière colonne, il y a d'abord $m - 1$ zéros, puis X', puis $\frac{(m+1)m}{2} X''$; le coefficient de ce dernier terme est, en effet, $m + (m-1) + \ldots + 1$.

Pour $m = 1$, le polynome

$$\begin{vmatrix} f & X' \\ f' & X'' \end{vmatrix}$$

doit être divisible par X ; ce résultat simple est indiqué dans les *Leçons d'Algèbre et d'Analyse* du regretté J. Tannery (t. I, p. 193, Exercice 68), et c'est en partant de là que j'ai été conduit à ce qui précède.

[On peut même se rendre compte du résultat obtenu en observant que toute valeur de x qui annule X satisfait aux quatre relations

$$\begin{aligned} &f + 3X'\varphi = 0, \\ &f' + 3X''\varphi + 2X'\varphi' = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

avec φ, φ', φ'' seulement ; le déterminant ci-dessus est donc nul pour les valeurs de x qui annulent X, il est divisible par X.]

15. Revenant maintenant au cas général, *on veut avoir, par exemple,*

$$\int \frac{f}{X^4}\,dx = \frac{\varphi}{X^3} + \int \frac{\omega}{X}\,dx,$$

de sorte que l'intégrale

$$\int \frac{f - \omega X^3}{X^4}\,dx$$

doit être algébrique. Le polynome ω de degré inférieur au degré de X, est donc déterminé par la condition que le polynome P, dans lequel on remplace f par $f - \omega X^3$, soit divisible par X ; en négligeant les termes qui contiennent X en facteur, on a seulement à remplacer dans le polynome en question f''' par $f''' - 3!\,\omega X'^3$; finalement, *le polynome* ω, *de degré inférieur au degré de* X, *est déterminé par la condition que le polynome*

$$\begin{vmatrix} f & 3X' & 0 & 0 \\ f' & 3X'' & 2X' & 0 \\ f'' & 3X''' & 5X'' & X' \\ f''' & 3X^{\text{IV}} & 8X''' & 6X'' \end{vmatrix} + (-1)^5 (3!)^2\, \omega X'^6$$

soit divisible par X.

Mais c'est là un résultat purement théorique, même dans les cas les plus simples.

[X4c]

SUR LES MOMENTS D'UNE AIRE PLANE ;

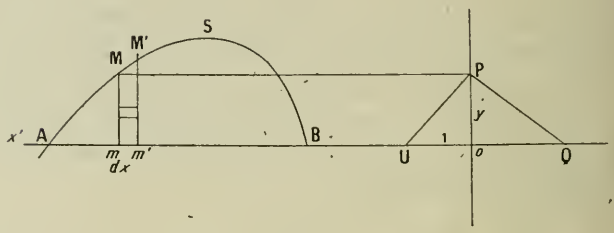
PAR M. L. ZORETTI.

Bien des procédés ont été indiqués pour calculer graphiquement le moment ou le moment d'inertie d'une aire plane par rapport à une droite. Je voudrais indiquer ci-dessous un procédé qui n'est peut-être pas nouveau mais dont je n'ai trouvé l'indication nulle part et qui, d'après les essais que j'en ai faits, me paraît assez simple.

Soit à calculer le moment d'inertie par rapport à $x'x$

de l'aire AB, dont nous supposerons d'abord le contour rencontré en un seul point par toute perpendiculaire

Fig. 1.



à $x'x$. Le moment d'inertie du petit rectangle mm'M'M sera, la densité étant prise pour unité,

$$dx \int_0^y y^2\,dy = \tfrac{1}{3} y^3\,dx.$$

Et le moment d'inertie total sera

$$\Sigma\, \tfrac{1}{3} y^3\,dx.$$

Prenons tous les dx égaux; c'est-à-dire supposons l'aire subdivisée en petits rectangles de même base (très petite) dx. Dans la somme, $\frac{dx}{3}$ se met en facteur et l'on a pour le moment d'inertie

$$I = \tfrac{1}{3}\, dx\, \Sigma y^3.$$

Il n'y a donc qu'à indiquer le calcul de Σy^3.

Soient deux droites rectangulaires; portons y en ordonnée sur l'une, soit $OP = y$, et l'unité de longueur en abscisse sur l'autre, soit $OU = 1$.

Menons PQ perpendiculaire à UP; on a

$$OP^2 = OU.OQ = OQ.$$

Donc

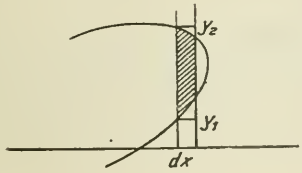
$$OQ = y^2.$$

Quant à y^3, c'est le double de l'aire du triangle OPQ et elle se mesure au planimètre,

La disposition est bien simple : on place l'axe OU sur le prolongement de l'axe donné $x'x$. On porte toutes les longueurs $y = \mathrm{OP}$ au moyen de lignes de rappel parallèles à $x'x$. On construit ensuite toutes les droites PQ correspondantes. Ceci posé, pour l'emploi du planimètre, on partira du point O et l'on décrira successivement toutes les aires OPQ en conservant toujours le même sens de parcours (même si le contour de l'aire S était traversé par l'axe $x'x$). Le planimètre fera lui-même l'addition Σy^3. On multiplira le nombre trouvé pour l'aire par $\frac{dx}{6}$.

Il nous faut lever la restriction que le contour de l'aire est rencontré en un seul point par toute perpendiculaire à Ox. Supposons qu'il y ait deux points de

Fig. 2.



rencontre; le lecteur généralisera sans peine. Le moment d'inertie d'un rectangle tel que celui de la figure sera

$$\tfrac{1}{3}\,dx.y_2^3 - \tfrac{1}{3}\,dx.y_1^3 = \tfrac{1}{3}\,dx(y_2^3 - y_1^3).$$

Le moment d'inertie total sera

$$\frac{dx}{3}(\Sigma y_2^3 - \Sigma y_1^3).$$

La construction de y_1 et de y_1^2 étant faite de la même

manière que celle de y_2 et de y_2^2, on voit que y_1^3 est l'aire doublée du triangle rectangle correspondant; pour la retrancher, il n'y a, lorsque l'index du planimètre sera revenu au point O, qu'à parcourir le contour de cette aire en sens inverse de celui choisi d'abord.

Remarques. — La méthode introduit le facteur $\frac{1}{6}$, le facteur dx et le facteur par lequel on doit multiplier l'indication brute en nombre de tours du planimètre pour avoir l'aire en centimètres carrés. Il peut y avoir avantage à introduire un autre facteur en prenant une longueur OU différente de l'unité de longueur. Si OU est multiplié par k, les mesures de OQ et de l'aire sont multipliées par $\frac{1}{k^3}$, et il faut les multiplier par k pour rendre à l'aire sa valeur. On pourra donc prendre pour OU une longueur quelconque, et multiplier le nombre fourni par la méthode précédente par la mesure de OU en centimètres.

On simplifie beaucoup en prenant $OU = \frac{1}{dx}$.

On peut encore simplifier le tracé des droites PQ de la façon suivante : quand le point P décrit OP, PQ reste tangente à une parabole de foyer U et de sommet O; la parabole étant supposée tracée, le tracé des droites PQ s'en déduit.

Il y a avantage à prendre OU assez grand, de l'ordre de grandeur des plus grandes longueurs OP par exemple, si l'on veut que les points Q soient bien déterminés, et en même temps que les longueurs OQ ne soient pas trop grandes. Alors, la portion de la parabole précédente qui est à utiliser est la portion comprise entre le sommet et le foyer. On peut donc la remplacer sans erreur sensible par le cercle osculateur au sommet, de rayon 2OU.

On pourrait modifier un peu la méthode en procédant comme dans le calcul d'une intégrale définie, c'est-à-dire en décomposant en trapèzes au lieu de rectangles; mais les calculs sont trop compliqués pour être pratiques.

Notons enfin que la méthode donne aussi le moment statique de l'aire par rapport à $x'x$. Le moment du rectangle $MM'm'm$ est en effet

$$dx \int_0^y y\,dy = \tfrac{1}{2}\,dx.y^2,$$

et le moment total est $\frac{1}{2}\,dx.\Sigma y^2$. On calcule Σy^2 en calculant la somme des longueurs OQ (au curvimètre). On obtient donc simultanément le centre de gravité et le rayon de gyration.

[M¹5i]

SUR UN FAISCEAU DE STROPHOÏDES;

PAR M. R. BOUVAIST.

Les cubiques circulaires ayant un point double donné O et passant par trois points A, B, C forment un faisceau linéaire; ce sont les inverses des coniques passant par O et les points D, E, F correspondants à A, B, C dans une inversion de centre O. Si le point O est l'orthocentre du triangle DEF, toutes les cubiques considérées sont des strophoïdes. Pour qu'il en soit ainsi le point O doit être tel que les droites OA, OB, OC coupent le cercle circonscrit au triangle ABC en trois points D, E, F, tels que O soit l'orthocentre

de DEF, ce qui exige, comme on le voit aisément, que O soit le centre d'un des cercles tangents aux côtés du triangle ABC.

Détermination du foyer d'une cubique circulaire à point double. — Soient Γ une conique donnée, O un point de Γ, la corde d'intersection de Γ et du cercle de rayon nul de centre O est la polaire Δ par rapport à Γ du point de Frégier relatif à O et à Γ. Si nous transformons la figure dans une inversion de centre O, le cercle transformé de Δ aura pour centre le foyer singulier de la cubique circulaire transformée de Γ.

Si Γ est une hyperbole équilatère, Δ est la perpendiculaire menée par le centre de cette hyperbole au diamètre passant par O, et le foyer singulier de la strophoïde transformée de Γ est le transformé du point de l'hyperbole diamétralement opposé à O.

Faisceau de strophoïdes passant par trois points A, B, C *et ayant pour point double le centre d'un cercle tangent aux côtés du triangle* ABC. — Nous pouvons supposer, sans nuire en rien à la généralité de nos résultats, que le triangle ABC est le triangle aux pieds des hauteurs du triangle DEF transformé de ABC dans une inversion de centre O.

Lieu des foyers singuliers des strophoïdes du faisceau. — Ces strophoïdes sont les inverses des hyberboles équilatères ODEF; si l'une des hyperboles coupe en M le cercle circonscrit au triangle DEF, son centre est le milieu de OM, le lieu des foyers singuliers des strophoïdes du faisceau sera par suite l'inverse du cercle DEF, O étant le centre d'inversion et la puissance d'inversion OA. OD, c'est le cercle ABC.

Réciproquement : *Tout cercle passant par le foyer singulier d'une strophoïde coupe la courbe en trois points*, A, B, C *tels que le point double soit le centre d'un cercle tangent aux côtés du triangle* ABC.

Ce théorème est une conséquence immédiate du suivant :

Un cercle passant par un point O′ *d'une hyperbole équilatère coupe la courbe en trois points* D, E, F; *soit* O *le point de l'hyperbole diamétralement opposé à* O′, *les droites* OD, OE, OF *coupent le cercle* DEF *en* A, B, C; *le point* O *est le centre* O *d'un cercle tangent aux côtés du triangle* ABC.

En effet, l'orthocentre de D, E, F est le point de l'hyperbole diamétralement opposé à O′, c'est le point O; le triangle A, B, C est donc homothétique par rapport à O du triangle au pied des hauteurs de DEF; O est donc le centre d'un cercle tangent aux côtés de ABC.

Une inversion de centre O nous donne le théorème énoncé plus haut relatif à la strophoïde et à un cercle passant par le foyer singulier de celle-ci.

Remarque. — Voici une autre propriété des points A, B, C d'intersection d'une strophoïde avec un cercle passant par le foyer singulier :

Les points A′, B′, C′ *d'intersection de la courbe avec les rayons vecteurs* OA′, OB′, OC′ *également inclinées sur les tangentes aux points doubles que les rayons* OA, OB, OC *sont en ligne droite.*

Cette propriété se démontre sans difficulté soit par le calcul, soit en partant des propriétés de l'hyperbole équilatère.

Remarque. — Si le point O est le centre du cercle DEF considéré plus haut, le triangle DEF est équilatéral, il en est de même du triangle ABC; donc : *le cercle passant par le foyer singulier d'une strophoïde et ayant pour centre le point double de la courbe coupe celle-ci en trois points qui sont les sommets d'un triangle équilatéral.*

Théorème. — *Toute strophoïde passant par les sommets d'un triangle* ABC *et ayant pour point double le centre d'un cercle tangent aux côtés du triangle* ABC *est analagmatique dans l'inversion triangulaire admettant pour triangle de référence le triangle* ABC.

L'équation en coordonnées trilinéaires normales d'une cubique circulaire circonscrite au triangle de référence est

$$\begin{aligned} f(xyz) = {} & (ux + vy + wz)(ayz + bxz + cxy) \\ & + (ax + by + cz)(\alpha yz + \beta xz + \gamma xy) = 0; \end{aligned}$$

elle admettra pour point double le centre du cercle inscrit au triangle si les équations

$$f'_x = f'_y = f'_z = 0$$

sont satisfaites pour $x = y = z = 1$, ce qui donne, en posant $a + b + c = 2p$, $u + v + w = \sigma$,

$$\alpha = u - \frac{a\sigma}{p}, \qquad \beta = v - \frac{b\sigma}{p}, \qquad \gamma = w - \frac{c\sigma}{p},$$

l'équation devient

$$\begin{aligned} & (ux + vy + wz)(ayz + bxz + cxy) \\ & \quad + (ax + by + cz)(uyz + vxz + wxy) \\ & \quad - \frac{\sigma}{p}(ax + by + cz)(ayz + bxz + cxy) = 0. \end{aligned}$$

Cette équation ne change pas quand on y change x, y, z, en $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$.

Remarque. — Si le point double était le centre d'un cercle ex-inscrit, par exemple le point $x = -1$, $y = z = 1$, l'équation de la courbe serait

$$\begin{aligned}&(ax + vy + wz)(ayz + bxz + cxy)\\&\quad + (ax + by + cz)(uyz + vxz + wxy)\\&\quad - \frac{\sigma'}{p - a}(ax + by + cz)(ayz + bxz + cxy) = 0,\end{aligned}$$

σ' étant égal à

$$-u + v + w,$$

la conclusion reste par conséquent la même.

Soit S un point du cercle circonscrit au triangle ABC; il résulte immédiatement le théorème précédent que l'asymptote de la strophoïde du faisceau considéré admettant S comme foyer singulier, est parallèle à la direction inverse du point S par rapport au triangle ABC. En tenant compte des propriétés énoncées plus haut, nous trouvons le théorème suivant :

Un cercle quelconque passant par le foyer singulier d'une strophoïde coupe la courbe en trois points M, N, P, *la droite de Simson du foyer singulier relative au triangle* MNP *est perpendiculaire à l'asymptote de la courbe.*

Enveloppe des asymptotes des strophoïdes du faisceau. — Soit S le foyer singulier d'une strophoïde du faisceau, le point S′ symétrique de S par rapport au point double O est sur l'asymptote de la courbe.

La perpendiculaire abaissée de S sur la droite de Simson de S relative au triangle ABC enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements H symétrique de l'hypocycloïde enveloppe des droites de Simson de ABC

par rapport au centre du cercle ABC; l'asymptote est la parallèle menée par S′ à la perpendiculaire menée par S à la droite de Simson de S; elle enveloppe, par suite, l'hypocycloïde symétrique de H par rapport à O.

Considérons maintenant une strophoïde de point double O, de foyer singulier F, et un cercle quelconque passant par F et coupant la courbe aux points A, B, C. Il existe une parabole de foyer F inscrite au triangle ABC; soit Δ la tangente commune autre que AB, AC, BC à cette parabole et au cercle de centre O tangent aux côtés du triangle ABC. Le lieu des foyers des coniques inscrites au triangle ABC et tangentes à Δ est une strophoïde, passant par ABC, ayant pour point double O et pour foyer singulier F, c'est la strophoïde considérée. En tant que lieu de foyers des coniques passant par le quadrilatère ABC, Δ, elle passe par les intersections de Δ avec les côtés du triangle ABC. La courbe étant d'autre part analagmatique dans une conversion triangulaire admettant ABC comme triangle de référence, les tangentes à la courbe aux sommets du triangle ABC (inverses des droites joignant chaque sommet au point d'intersection de la courbe avec le côté opposé) rencontreront les côtés BC, CA, AB en trois points en ligne droite. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant : *Un cercle quelconque passant par le foyer singulier* F *d'une strophoïde rencontre la courbe en trois points* A, B, C; *les côtés* BC, CA, AB *rencontrent la courbe en* α, β, γ; *les points* α, β, γ *sont sur une tangente au cercle ayant pour centre le point double de la courbe et tangent aux côtés du triangle* ABC. *Les tangentes à la courbe aux sommets* A, B, C *rencontrent les côtés* BC, CA, AB *en trois points en ligne droite.*

Généralisation. — Considérons plus généralement une cubique circulaire Γ passant par son foyer singulier (focale de van Rees) et un cercle quelconque passant par ce foyer singulier F et rencontrant la courbe en A, B, C. Il existe une parabole P du foyer F inscrite au triangle ABC; soit Δ une tangente quelconque de P, le lieu des foyers des coniques inscrites dans le quadrilatère ABC, Δ est une focale passant par A, B, C et ayant F comme foyer singulier. Si Δ varie nous obtenons un faisceau linéaire de focales, qui contient visiblement la focale Γ; à Γ correspond une tangente Δ_1 à la parabole P. L'asymptote de Γ est parallèle à l'axe de la parabole P, c'est-à-dire à la direction inverse du point F par rapport au triangle ABC. Il résulte de tout cela que la focale est analagmatique dans une inversion triangulaire admettant ABC comme triangle de référence et l'on a les théorèmes suivants :

Un cercle quelconque passant par le foyer singulier F *d'une focale de van Rees coupe la courbe en trois points* A, B, C :

1° *Les côtés* AB, BC, CA *coupent la courbe en trois points en ligne droite ;*

2° *Les tangentes à la courbe aux sommets* A, B, C *rencontrent les côtés opposés en trois points en ligne droite. Ces points sont, par suite, les contacts d'une conique tritangente à la courbe ;*

3° *La droite de Simson du point* F *relative au triangle* ABC *est perpendiculaire à l'asymptote de la courbe ;*

4° *La courbe est analagmatique dans une inversion triangulaire admettant* ABC *comme triangle de référence.*

Remarque. — Il est facile de généraliser ces théo-

rèmes dans le cas d'une cubique quelconque par projection; la proposition 3° peut, en particulier, s'énoncer dans le cas d'une cubique quelconque comme il suit :

Soit A *un point d'une cubique*, B, C *les contacts de deux tangentes à la courbe menées par* A; *une conique passant par* ABC *coupe la courbe en trois points* D, E, F *qui sont les contacts d'une conique tritangente à la cubique.*

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET AUX BOURSES DE LICENCE EN 1911.

Composition de Mathématiques
(Sciences. — I).

On considère trois axes rectangulaires $Oxyz$ *et la surface de révolution, appelée* tore, *dont l'équation est*

$$(x^2+y^2+z^2+l^2\cos^2\theta)^2=4l^2(x^2+y^2),$$

l *étant un nombre positif et* θ *un angle aigu.*

1° *On coupe le tore par le plan* $z=x\tan\theta$. *Former l'équation de la section dans son plan et vérifier que cette section se compose de deux circonférences* c *et* γ, *ayant leurs centres sur* Oy. *Les projections de ces circonférences sur le plan* xOy *admettent le point* O *pour foyer.*

On déduit facilement de là qu'il existe sur le tore, à part les parallèles et les méridiens, deux systèmes de circonférences : les circonférences C *et les circonférences* Γ. *Montrer que deux circonférences d'un*

même système (C *ou* Γ) *ne se coupent jamais, que deux circonférences de systèmes différents* (C *et* Γ) *ont toujours deux points communs.*

2° *Trouver les courbes* K *qui coupent tous les parallèles du tore sous un angle donné* V. *Construire la projection de ces courbes sur le plan* xOy, *d'abord pour* $V = \theta$, *puis pour* $\operatorname{tang} V = 2 \operatorname{tang} \theta$. *Comment peut-on déduire la seconde courbe de la première et, d'une manière plus générale, comment peut-on construire point par point les courbes* K ?

3° *Former l'équation générale des sphères* s *passant par l'une des circonférences* C, *trouver le lieu des centres de ces sphères et montrer que chacune d'elles contient aussi une circonférence* Γ.

Montrer que toutes les sphères s *passant par un point* a *passent aussi par un point associé* a'.

4° *On donne deux points* a *et* b *non situés sur le tore;* b *est différent de* a *et de son associé* a'. *Soit* C_0 *l'une des circonférences* C. *Par* C_0 *et* a *passe une sphère* A_0 *qui coupe le tore suivant une circonférence* Γ_0. *Par* Γ_0 *et* b *passe une sphère* B_0 *qui coupe le tore suivant une circonférence* C_1. *Par* C_1 *et* a *passe une sphère* A_1 *qui coupe le tore suivant une circonférence* Γ_1. *Par* Γ_1 *et* b *passe une sphère* B_1 *qui coupe le tore suivant une circonférence* C_2, *et ainsi de suite.*

On étudiera dans deux cas particuliers à quelle condition la suite des circonférences $C_0, C_1, C_2, \ldots$ *est périodique.*

Supposant d'abord a *et* b *sur* Oz, *on montrera que les centres des sphères* A_i *et* B_i *sont alors dans deux plans dont on se donnera les équations sous la forme*

$$z = l \cos\theta \operatorname{tang}\alpha, \qquad z = l \cos\theta \operatorname{tang}\beta.$$

Quelle relation doit-il y avoir entre α et β pour que $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$ étant différentes, C_n soit identique à C_0? — Calculer algébriquement le rapport $u = \frac{\tang \alpha}{\tang \beta}$ dans le cas où $n = 10$.

En second lieu, on prendra les valeurs suivantes pour les coordonnées de a et de b :

$$a(x = l\cos\theta\cos A,\ y = l\cos\theta\sin A,\ z = 0);,$$
$$b(x = l\cos\theta\cos B,\ y = l\cos\theta\sin B,\ z = 0).$$

Montrer que si C_0 est identique à C_n pour un choix particulier de C_0, il en est de même quelle que soit C_0, et trouver la relation de position entre a et b pour laquelle cette circonstance se produit.

SOLUTION PAR M. H. L.

La surface proposée S est engendrée par les circonférences d'équation

$$x^2 + z^2 + l^2\cos^2\theta = \pm 2lx$$

du plan Oxz en tournant autour de Oz. Ces circonférences ont leurs centres sur Ox à la distance l de O; leur rayon est égal à $l\sin\theta$; elles sont vues de l'origine sous l'angle 2θ. Le plan $z = x\tang\theta$, perpendiculaire au plan Oxz, a pour trace sur ce plan une tangente commune intérieure à ces deux circonférences; c'est donc un plan bitangent au tore.

Si l'on rapporte les points de ce plan bitangent P à sa trace $O\xi$ sur le plan Oxz et à l'axe des y et comme axes, on a les formules

$$x = \xi\cos\theta, \qquad y = y, \qquad z = \xi\sin\theta.$$

L'équation de la section de S par P, rapportée aux axes $O\xi y$, est donc

$$(\xi^2 + y^2 + l^2\cos^2\theta)^2 = 4l^2(\xi^2\cos^2\theta + y^2)$$

ou

$$(\xi^2 + y^2 - l^2\cos^2\theta)^2 = 4l^2y^2\sin^2\theta,$$
$$\xi^2 + y^2 - l^2\cos^2\theta = \pm 2ly\sin\theta.$$

La section est donc constituée par deux circonférences c et γ de rayon l et dont les centres sont sur Oy à la distance $l\sin\theta$ de O. Il résulte immédiatement de là que c et γ se coupent sous l'angle 2θ, ou, d'une façon plus précise, que c et γ coupent sous l'angle θ les parallèles passant par les points de tangence de P et de S.

En projection sur Oxy les équations de c et γ sont, d'après les formules de transformations,

$$\frac{x^2}{\cos^2\theta} + y^2 - l^2\cos^2\theta = \pm 2ly\sin\theta,$$

ou

$$\frac{x^2 + y^2}{\cos^2\theta} = y^2\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \pm 2ly\sin\theta + l^2\cos^2\theta$$
$$= (y\tang\theta \pm l\cos\theta)^2.$$

Donc *le point* O *est un foyer pour ces projections.*

Faisons tourner le plan P d'un angle quelconque autour de Oz; P vient en P_1, c en c_1, γ en γ_1; c_1 et γ_1 sont sur le tore S, toutes les circonférences telles que c_1 forment la famille C, les circonférences telles que γ_1 forment la famille Γ. Quant à P_1 c'est l'un quelconque des plans bitangents au tore, c'est-à-dire tangent au tore en deux points et deux points seulement.

Soit M un point du tore; le parallèle contenant M coupe P en deux points symétriques par rapport à $O\xi$ et situés sur c et γ. Mais $O\xi$ n'est pas un diamètre ni de c ni de γ; donc l'un de ces deux points m est sur c, l'autre μ est sur γ. La seule circonférence de C passant par M s'obtient donc en effectuant sur c la rotation autour de Oz qui amène m en M. De même on trouve la seule circonférence de Γ qui passe par M. Donc : *par*

tout point du tore passe une circonférence de C *et une seule, une circonférence de* Γ *et une seule.* Par suite *deux circonférences d'un même système ne se rencontrent jamais*, et l'on voit aussi par cela même que les deux systèmes sont bien différents.

Soient maintenant deux circonférences c_1 et γ_1 respectivement de C et de Γ. c_1 rencontre le plan P_1 de γ_1 en deux points qui sont réels, car l'intersection des plans de c_1 et de γ_1 passe par O, point intérieur à c_1. La section de S par P_1 se compose de γ_1 et d'une circonférence de la famille C qui, par suite, ne rencontre pas c_1; donc les points de rencontre de c_1 et de P_1 sont sur γ_1. Et l'on voit que *deux circonférences de systèmes différents se coupent toujours en deux points réels.*

Cette première partie est connue sous le nom de *théorème d'Yvon Villarceau;* on la démontre le plus souvent en remarquant que le cercle à l'infini étant courbe double pour S, tout plan bitangent à S coupe S suivant une quartique ayant quatre points multiples : les points cycliques et les points de tangence. Trois de ces points n'étant pas en ligne droite, la section se compose de deux coniques, qui sont des cercles puisqu'elles passent par les points cycliques.

Une autre démonstration consiste, appelant U et V les points de rencontre des cercles méridiens avec Oz, à faire une inversion de centre U. Le tore devient un cône dont le sommet est l'homologue V′ de V. P devient une sphère P′ bitangente au cône et qui, par suite, le coupe suivant deux circonférences de systèmes différents et dont les plans ne sont pas perpendiculaires à Oz. Ce mode de raisonnement, qui permettrait aussi de voir les situations respectives des systèmes C et Γ et de résoudre les deuxième et troisième parties, a l'inconvénient d'obliger à raisonner sur des éléments imaginaires assez compliqués; par exemple, les circonférences intersections de P′ et du cône sont en même temps des paraboles, elles sont dans des plans isotropes.

Une autre démonstration, moins rapide mais plus instructive,

est la suivante : puisque toutes les normales du tore rencontrent Oz, toute sphère bitangente à S, sans être tangente en plus de deux points à S, est coupée par le plan méridien de son centre suivant une circonférence dont Oz n'est pas un diamètre et qui est tangente aux deux circonférences méridiennes; donc la puissance de cette sphère par rapport au point O est égale à $-l^2\cos^2\theta$, d'après les propriétés connues des circonférences tangentes à deux autres. Le lieu des centres de ces sphères bitangentes est coupé par un plan méridien suivant le lieu des centres des circonférences dont il vient d'être parlé et qui sont tangentes à deux circonférences méridiennes. Ce dernier lieu est une hyperbole d'axe non transverse Oz, donc le lieu des centres des sphères est un hyperboloïde H à une nappe et de révolution autour de Oz.

Ceci étant, soit M un point du tore, s le centre de la sphère bitangente à S en M et en un autre point M'. Au point M de S faisons correspondre le point s de H et à s de H nous faisons correspondre M et M'. A une courbe λ décrite par s correspondra une ou deux courbes situées sur S et sur l'enveloppe des sphères de centre s et de puissance $-l^2\cos^2\theta$ par rapport à O. Or, si λ est une droite, toutes les sphères considérées passent par un même cercle qui a son centre sur λ et dont le plan qui passe par O est perpendiculaire à λ. Ce cercle est réel si λ est réelle, car sa puissance par rapport à O est négative. C'est ce cercle qui correspondra à la droite λ. Or il y a sur H deux familles de génératrices, d'où deux familles de cercles sur le tore S.

Je laisse au lecteur le soin de voir que cette transformation qui fournit évidemment la solution de la troisième partie, donne les relations indiquées par l'énoncé entre les familles C et Γ.

La proposition est aussi susceptible de diverses démonstrations élémentaires, en général très artificielles. J'en indique cependant une, qui n'est d'ailleurs qu'une vérification, parce qu'elle est en rapport avec le raisonnement fort connu de M. Courcelles sur la projection du cercle.

Soit, dans un plan P, une circonférence c de centre A et de rayon l, projetons-la orthogonalement sur le plan xOy. Nous supposons que Oy passe par A et que O soit un foyer de la projection; de sorte que si θ est l'angle des deux plans, on a

$$OA = l\sin\theta.$$

Soient M un point de c, m et P ses projections orthogonales sur Oxy et sur Oy; soit OI perpendiculaire sur AM. (Le lecteur est prié de faire la figure.) On a

$$\sin\theta = \frac{Mm}{MP} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{AO}{AM} = \frac{IO}{MP},$$

à cause des triangles semblables AOI, AMP; donc $IO = Mm$. Et, par la considération des triangles MIO, MmO on voit que $IM = Om$. C'est le raisonnement de M. de Courcelles.

Sur Om portons $O\omega = OM = l$, alors $m\omega = AI$; donc les triangles AOI, $Mm\omega$ sont égaux et $M\omega = l\sin\theta$. Donc la surface S engendrée par la rotation de c autour de la perpendiculaire Oz à Oxy peut aussi être engendrée par la rotation autour de Oz d'une circonférence située dans le plan méridien Ozm de rayon $M\omega = l\sin\theta$ et dont le centre ω est à la distance l de O.

On aperçoit aussi en particulier la propriété signalée d'après laquelle O est le foyer de la projection de c. La raison profonde de ce fait tient à la constitution du tore ou pour mieux dire de toute surface de révolution. On voit, en effet, facilement que les parallèles de rayon nul des points U et V précédemment considérés doivent être compris dans le contour apparent du tore en projection sur Oxy. Et c, par exemple, rencontre chacun de ces parallèles.

2. Fixons la position d'un point M sur le tore par les coordonnées polaires ρ, ω de sa projection sur Oxy et soit s l'arc du méridien qui le contient compté dans un sens fixé à partir de l'un de ses points de rencontre avec Oxy; ρ et s sont liés par une relation connue. L'équation différentielle des courbes demandées est

$$\operatorname{tang} V = \frac{ds}{\rho\, d\omega}.$$

Si l'on appelle α l'inclinaison du rayon du méridien de M avec le plan Oxy, on a

$$\rho = l + l\sin\theta\cos\alpha, \qquad ds = l\sin\theta\, d\alpha.$$

On peut déduire de là une relation différentielle

entre α et ω qui s'intègre facilement ; mais il est plus rapide de former l'équation entre ρ et ω. On a

$$d\rho = -l \sin\theta \sin\alpha \, d\alpha = -\sin\alpha \, ds;$$

donc

$$\left(\frac{\rho - l}{l \sin\theta}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 = 1$$

ou

$$\left(\frac{\rho - l}{l \sin\theta}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{\rho \operatorname{tang} V \, d\omega}\right)^2 = 1.$$

Posons $u = \frac{1}{\rho}$, l'équation devient

$$\left(\frac{1 - lu}{l \sin\theta}\right)^2 + \left(\frac{du}{\operatorname{tang} V \, d\omega}\right)^2 = u^2$$

ou

$$\left(\frac{du}{d\omega}\right)^2 + \operatorname{tang}^2 V \left[\frac{u^2}{\operatorname{tang}^2\theta} - \frac{2u}{l \sin^2\theta} + \frac{1}{l^2 \sin^2\theta}\right] = 0;$$

$$\left(\frac{du}{d\omega}\right)^2 = \left(\frac{\operatorname{tang} V}{\operatorname{tang}\theta}\right)^2 \left[\frac{\sin^2\theta}{l^2 \cos^4\theta} - \left(u - \frac{1}{l \cos^2\theta}\right)^2\right].$$

Et enfin

$$\frac{\dfrac{l \cos^2\theta}{\sin\theta} du}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{l \cos^2\theta \, u - 1}{\sin\theta}\right)^2}} = \pm \frac{\operatorname{tang} V}{\operatorname{tang}\theta} d\omega,$$

$$\frac{l \cos^2\theta}{\rho} = 1 + \sin\theta \cos\left[\pm \frac{\operatorname{tang} V}{\operatorname{tang}\theta} (\omega - \omega_0)\right].$$

Telle est l'équation polaire des projections $\mathcal{K}(V)$ des courbes K demandées.

Pour $V = \theta$, on reconnaît les ellipses projections des circonférences C et Γ.

Pour $\frac{\operatorname{tang} V}{\operatorname{tang}\theta} = 2$, on a des courbes que je laisse au lecteur le soin de tracer, et qui se déduisent des ellipses $\mathcal{K}(\theta)$, en faisant correspondre à chaque point M d'une telle ellipse le point m ayant même ρ et ayant un angle polaire moitié de celui de M.

D'une façon générale, si M de coordonnées ρ, ω

décrit une courbe $\mathcal{K}(\theta)$, le point M′ de coordonnées ρ', ω',

$$\rho' = \rho, \qquad \omega' = A\omega + B,$$

A et B étant deux constantes, décrit une courbe $\mathcal{K}\left(\frac{\tang\theta}{A}\right)$.

La construction des tangentes aux courbes $\mathcal{K}$ résulte de suite de la définition des courbes K.

Les relations entre les diverses courbes $\mathcal{K}$ se voient tout aussi bien sur l'équation différentielle $\rho \tang V d\omega = ds$, et cela montre qu'elles subsistent sur toute surface de révolution.

Ainsi, sur une surface de révolution, il suffit de connaître une courbe $K(V_0)$, pour une valeur particulière V_0 de V, pour en déduire sans intégration toutes les courbes $K(V)$. Pour traiter géométriquement la deuxième partie, il va suffire de prouver que les courbes C et Γ sont des courbes $K(\theta)$.

On a déjà vu que les cercles C et Γ coupent sous l'angle θ les parallèles lieux des points de tangence des plans bitangents au tore. Soient λ l'un de ces parallèles, λ′ un autre parallèle quelconque ; soient a et a' les points de rencontre de λ et λ′ et d'un même demi-plan méridien.

Il existe une inversion dont le centre est sur Oz, et qui change a en a' ; elle change λ en λ′ et le tore reste inaltéré. Elle change donc les circonférences C et Γ en circonférences situées sur le tore, et qui sont des circonférences Γ et C, car considérons, par exemple, la sphère invariable dans l'inversion et qui passe par la circonférence c. Cette sphère ne coupe le tore S à distance finie que suivant c, et la circonférence γ' symétrique de c par rapport au plan méridien contenant le centre de S ; donc cette circonférence γ', qui est une circonférence Γ, est l'inverse de c. Par suite, les circonférences C et Γ coupent λ et λ′ sous le même angle θ.

Cette proposition est aussi susceptible d'une vérification très élémentaire. Reprenons les notations employées plus haut, et soit MT la tangente en M à c ; T est sur OA ; soit TB perpendiculaire sur Om.

Utilisant les résultats précédents et les similitudes des

triangles OmP, OTB et AMT, AIO, MPT, on a

$$\frac{TB}{mP} = \frac{OT}{Om} = \frac{OT}{IM} = \frac{AT}{AM} = \frac{MT}{MP};$$

donc les deux triangles rectangles MPm et MTB sont semblables; l'angle MTB est donc égal à θ, ce qui prouve que c coupe, sous l'angle θ, le parallèle du tore S passant par M, puisque TB est parallèle à la tangente en M au parallèle du tore.

3. Soit C_1 l'une des circonférences C; le lieu des centres des sphères passant par C_1 est la perpendiculaire D au plan de C_1 en son centre, et le lieu des centres des sphères passant par l'une quelconque des circonférences C est l'hyperboloïde à une nappe H engendré par D en tournant autour des Oz.

Comme la symétrique d'une circonférence C par rapport à un plan méridien est évidemment une circonférence Γ, H est aussi le lieu des centres des sphères contenant une circonférence Γ; mais ce sont les génératrices de système différent de D qui apparaissent maintenant comme lieu des centres des sphères passant par une circonférence Γ déterminée.

Soit s une sphère passant par C_1; la circonférence Γ_1 symétrique de Γ_1 par rapport au plan méridien passant par le centre de s, est évidemment une circonférence Γ; donc s contient bien une circonférence Γ. Les axes des circonférences C_1 et Γ_1 sont les deux génératrices de H passant par le centre de s. Aux points de rencontre de C_1 et Γ_1, la sphère s est bitangente au tore S.

On pourrait retrouver tout cela par le calcul; bornons-nous à former l'équation des sphères s.

Supposons d'abord que C_1 soit la circonférence

$$\xi^2 + y^2 - l^2 \cos^2\theta = 2ly \sin\theta,$$
$$x = \xi \cos\theta, \qquad z = \xi \sin\theta.$$

La sphère s aura pour équation

$$(1)\quad x^2+y^2+z^2-2ly\sin\theta-l^2\cos^2\theta+2\lambda(z-x\operatorname{tang}\theta)=0.$$

Et si C_1 est quelconque, on aura l'équation la plus générale en faisant tourner les axes d'un angle ω arbitraire :

$$(2)\quad x^2+y^2+z^2-2l\sin\theta(x\sin\omega+y\cos\omega)$$
$$-l^2\cos^2\theta+2\lambda[z-\operatorname{tang}\theta(x\cos\omega+y\sin\theta)]=0.$$

On retrouve ainsi ce fait déjà vu que ces sphères s ont toutes une puissance égale à $-l^2\cos^2\theta$, par rapport au point O ; donc celles d'entre elles qui passent par un point a passent aussi par le point a', tranformé de a par l'inversion de centre O et de puissance $-l^2\cos^2\theta$.

4. Si a est sur Oz, a' y est aussi, et le centre de s est dans le plan perpendiculaire au milieu de aa' ; la cote de ce centre est $-\lambda$; on posera donc

$$-\lambda=l\cos\theta\operatorname{tang}\alpha.$$

Les coordonnées du centre de s sont :

$$X=-\frac{l\sin\theta}{\cos\alpha}\sin(\alpha+\omega),\qquad Y=\frac{l\sin\theta}{\cos\alpha}\cos(\alpha+\omega),$$
$$Z=l\cos\theta\operatorname{tang}\alpha.$$

Le plan méridien de ce centre fait avec Oxz un angle $\frac{(2k+1)\pi}{2}+(\alpha+\omega)$; ce plan bissecte intérieurement l'angle formé par les deux demi-droites joignant O aux centres des circonférences C_0 et Γ_0 situées sur s, droites qui font avec Ox les angles u et u' ; on a

$$u=\frac{\pi}{2}+\omega,$$

d'après la transformation qui permet de passer de (1) à (2).

Donc

$$\frac{u+u'}{2} = \frac{(2k+1)\pi}{2} + (\alpha+\omega) = k'\pi + \alpha + u,$$

$$\frac{u'-u}{2} = k'\pi + \alpha.$$

Si u_1 est l'angle relatif à C_1, on a de même

$$\frac{u'-u_1}{2} = k''\pi + \beta;$$

donc $\frac{u_1-u}{2} = \alpha - \beta$, à un multiple de π près.

Pour que la suite C_0, C_1, ... soit périodique et contienne n circonférences différentes, il est, d'après cela, nécessaire et suffisant que $\alpha - \beta$ soit égal à $p\frac{\pi}{n}$, p étant un nombre premier avec n.

En passant aux tangentes, cette relation s'écrit

$$\frac{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta}{1 + \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta} = \operatorname{tang}\frac{p\pi}{n}$$

ou

$$\frac{Z'-Z}{l^2\cos^2\theta + ZZ'} = \frac{\operatorname{tang}\frac{p\pi}{n}}{l\cos\theta},$$

en appelant Z et Z' les cotes des centres des deux systèmes de sphères.

On tire de là, en particulier,

$$u = \frac{Z}{Z'} = \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}\beta} = \frac{\operatorname{tang}\alpha\left[1 + \operatorname{tang}\frac{p\pi}{n}\operatorname{tang}\alpha\right]}{-\operatorname{tang}\frac{p\pi}{n} + \operatorname{tang}\alpha}$$

$$= \frac{Z\left[l\cos\theta + Z\operatorname{tang}\frac{p\pi}{n}\right]}{l\cos\theta\left[-l\cos\theta\operatorname{tang}\frac{p\pi}{n} + Z\right]},$$

formule qui donne le rapport des cotes en fonction de l'une d'elles.

Pour que le calcul soit fait algébriquement, il reste à calculer $\operatorname{tang} p\frac{\pi}{n}$ par un procédé algébrique, toutes les fois que cela est possible. Pour $n = 10$, on a à calculer $\operatorname{tang}\frac{\pi}{10}$, $\operatorname{tang}\frac{3\pi}{10}$, $\operatorname{tang}\frac{7\pi}{10}$, $\operatorname{tang}\frac{9\pi}{10}$; c'est-à-dire les tangentes des arcs x tels que $\operatorname{tang} 5x$ soit infinie; les valeurs de ces tangentes s'obtiennent en annulant le dénominateur de l'expression de $\operatorname{tang} 5x$ en fonction de $\operatorname{tang} x = t$, donc ce sont les racines de l'équation

$$1 - 10t^2 + 5t^4 = 0.$$

La formule donnant $\frac{Z'}{Z}$ en fonction de Z convient en particulier pour trouver les cas où l'un des deux systèmes de sphères se réduit au système des plans bitangents, comme on le verrait facilement.

Examinons la seconde hypothèse : s passe par a $(l\cos\theta\cos A, l\cos\theta\sin A, 0)$.

Portons ces coordonnées dans (2), il vient, en posant toujours $-\lambda = l\cos\theta\operatorname{tang}\alpha$,

$$\operatorname{tang}\alpha = \operatorname{tang}(A - \omega), \qquad \alpha = A - \omega + k\pi.$$

Conservant à u et u' les significations indiquées, on a

$$u = \frac{\pi}{2} + \omega, \qquad \frac{u + u'}{2} = k'\pi + \alpha + u = (2k + 1)\frac{\pi}{2} + A.$$

De même,

$$\frac{u_1 + u'}{2} = (2k'' + 1)\frac{\pi}{2} + B;$$

donc, à un multiple de π près,

$$\frac{u_1 - u}{2} = B - A.$$

Pour que la suite C_0, C_1, ... soit périodique et contienne n circonférences différentes, il est donc nécessaire et suffisant que $B - A = p\frac{\pi}{n}$, p étant premier avec n. Cette condition est indépendante du choix de C_0.

Ces questions se traitent facilement par la Géométrie. Les sphères s, passant par un point a, passent par son associé a'; les centres de ces sphères sont donc sur la conique $\mathcal{A}$ section de H par le plan perpendiculaire au milieu de aa'. De même, les centres des sphères s passant par b sont sur une conique $\mathcal{B}$. Désignons par a_0, b_0, a_1, b_1, ... les centres des sphères s nécessaires pour construire la suite C_0, Γ_0, C_1, Γ_1, ...

La ligne brisée a_0b_0, b_0a_1, a_1b_1, b_1a_2, ... est formée de génératrices de H. Il faut écrire que ce polygone se ferme. D'après un théorème de Poncelet, on sait que la condition de fermeture ne dépend pas du point de départ a_0, mais dépend seulement des coniques $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ prises sur H. Il est d'ailleurs inutile d'invoquer ce théorème.

Examinons la première hypothèse. Alors $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux circonférences ; en projection sur Oxy, on a deux circonférences $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{B}'$, projections de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{B}$, qui admettent O pour centre, et les côtés du polygone sont tangents en projection au cercle de gorge de H. Il suffit donc d'écrire qu'un côté, a_0b_0 par exemple, est en projection vu du centre sous l'angle $p\frac{\pi}{n}$, d'où un calcul identique à celui du texte.

Dans la seconde hypothèse, puisque a est à la distance $l\cos\theta$ de O, le point a' est symétrique de a par rapport à O, et $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux hyperboles méridiennes de H. En projection sur Oxy, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux diamètres du cercle de gorge, l'angle de ces deux diamètres est l'angle aOb, c'est-à-dire $B - A$. En projection, le polygone $a_0b_0a_1b_1$ ... est constitué de tangentes au cercle de gorge, et les sommets sont sur deux diamètres $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$ de ce cercle.

Un calcul immédiat, qui est celui qu'on fait pour calculer la déviation d'un rayon lumineux après deux réflexions, montre que l'angle de a_0b_0 et de a_1b_1 est $2(B - A)$; pour qu'il y ait fermeture du polygone, a_n étant confondu avec a_0, il faut que $2n(B - A)$ soit un multiple de 2π.

On peut encore remarquer que les deux cas particuliers examinés se ramènent facilement l'un à l'autre ; une inversion dont le centre est sur la circonférence A de centre O, de rayon $l \cos \theta$, et située dans Oxy, transforme le tore en un tore dont le nouvel axe est la droite transformée de A; les parallèles de l'un des tores correspondent aux méridiens de l'autre.

On ramène le cas général, où a et b sont quelconques, à l'un ou l'autre des deux cas que l'on vient d'examiner; la figure formée par H, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ est, en effet, toujours la même que dans ces cas, à une transformation homographique près.

On voit ainsi que la condition de périodicité est indépendante du choix de C_0, et, en ramenant au second cas particulier examiné, on est conduit à exprimer cette condition de fermeture en disant que le rapport anharmonique des plans de $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ et des plans tangents à H menés par la droite commune aux plans de $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ est égale à l'une de celles des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, qui sont des racines primitives.

Si maintenant on utilise le théorème de Poncelet, d'après lequel la condition de fermeture d'un polygone formé de segments de génératrices d'une quadrique H et inscrit dans la courbe commune à H et à une autre quadrique est indépendante du premier élément choisi, on peut encore aller plus loin.

On peut, en effet, définir la suite C_0, Γ_0, C_1, Γ_1, ... à partir d'une circonférence C_0 à l'aide d'une famille algébrique quelconque de sphères bitangentes s pourvu que cette famille contienne deux sphères et deux seulement passant par chaque circonférence C et par chaque circonférence Γ. Une telle famille de sphères remplacera alors la famille formée à la fois par les sphères passant par a et par les sphères passant par b que l'on considérait auparavant.

Pour une telle famille, le lieu des centres des sphères est une courbe de H qui a deux points et deux seulement sur chaque génératrice de chacun des deux systèmes ; c'est donc une biquadratique gauche et le théorème de Poncelet s'applique ; donc, si la suite C_0, Γ_0, C_1, ..., construite à l'aide de cette famille de sphères, est périodique pour un choix particulier de C_0, elle l'est quelle que soit C_0.

On pourra prendre, par exemple, pour la famille des sphères s, celles qui sont tangentes à une droite, à un plan ou à une sphère donnée, et qui font partie de la même famille algébrique.

Le lecteur pourra rechercher pour ces cas quelles sont les conditions de périodicité ; il pourra aussi se demander dans quelle mesure les résultats obtenus sont applicables au cas d'une surface cyclide autre que le tore.

Composition de Mathématiques

(Sciences. — I et II).

On considère un point matériel M, *de masse* m, *sur lequel un centre fixe* S *exerce une attraction* F *inversement proportionnelle au carré de la distance* $r = \mathrm{SM}\left(\mathrm{F} = -\frac{km}{r^2}\right)$.

1° *Indiquer à quelles conditions doit satisfaire la vitesse initiale pour que la trajectoire de* M *soit une circonférence* C; *on calculera la durée* T *d'une révolution complète en fonction de la constante* k *et du rayon* R *de la circonférence* C.

2° *Un autre point matériel* M', *de masse* m', *décrit sous l'action du même centre de forces* S $\left(\textit{la force étant } \mathrm{F}' = -\frac{km'}{r'^2} \textit{ avec } r' = \mathrm{SM}'\right)$ *une parabole* P *de paramètre* p. *Calculer le temps employé par* M' *pour décrire un arc* AB *de la parabole ; on se donnera les angles* α *et* β *de* SA *et* SB *avec l'axe* Sx *de la parabole.*

3° *La parabole* P *et la circonférence* C *étant supposées dans un même plan, à quelle condition se coupent-elles en deux points* A *et* B ? *Cette condition étant remplie, calculer le temps* T' *pendant lequel le point* M' *reste à l'intérieur de* C, *et étudier la variation du rapport* $\frac{\mathrm{T}'}{\mathrm{T}}$ *quand le paramètre* p *varie.*

4° *L'orbite de la Terre étant supposée circulaire, calculer le nombre maximum de jours durant lesquels une comète, décrivant une orbite parabolique dans le plan de l'orbite terrestre, peut rester à l'intérieur de l'orbite terrestre.*

SOLUTION PAR H. L.

1° La position initiale de M est supposée sur C, donc $SM = r = R$. La vitesse initiale v doit être perpendiculaire à SM et telle que

$$\frac{v^2}{R} = \left|\frac{F}{m}\right| = \frac{k}{R^2}, \qquad v = \sqrt{\frac{k}{R}}.$$

Donc la durée T est égale à

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R^{\frac{3}{2}}}{k^{\frac{1}{2}}}.$$

2° Au sommet α de la parabole $r = \frac{p}{2}$, le rayon de courbure est égal à p, donc la vitesse v en ce point est telle que

$$\frac{v^2}{p} = \left|\frac{F'}{m'}\right| = \frac{4k}{p^2}, \qquad v = 2\sqrt{\frac{k}{p}}.$$

La vitesse aréolaire constante de M′ est donc

$$\frac{1}{2} v \times \frac{p}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{kp}.$$

On aura le temps demandé en divisant par cette vitesse aréolaire l'aire balayée par SM, laquelle est

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2\, d\theta,$$

avec

$$\rho = \frac{p}{1 + \cos\theta},$$

en supposant Sx dirigée vers le sommet X.

On peut d'ailleurs aussi calculer cette aire comme différence des aires des secteurs paraboliques XSB, XSA, dont les aires sont fournies par la Géométrie élémentaire. L'aire du second est

$$\frac{2}{3}\rho \sin\alpha\left(\frac{p}{2} - \rho\cos\alpha\right) + \frac{1}{2}\rho^2 \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{6}\rho\sin\alpha[2p - \rho\cos\alpha];$$

dans cette formule, $\rho = \frac{p}{1 + \cos\alpha}$, ce qui permet d'écrire l'aire sous la forme $\frac{1}{6}\rho\sin\alpha(p + \rho)$.

3° α étant donné par la formule

$$R = \frac{p}{1 + \cos\alpha}, \qquad \text{d'où} \qquad \sin\alpha = \frac{1}{R}\sqrt{p(2R - p)},$$

on a

$$T' = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{kp}}{2}\right)} \times 2 \times \frac{1}{6}R(p + R)\sin\alpha = \frac{2}{3\sqrt{k}}(p + R)\sqrt{2R - p};$$

$$\frac{T'}{T} = \frac{1}{3\pi}\,\frac{(p - R)(2R - p)^{\frac{1}{2}}}{R^{\frac{3}{2}}}.$$

Tous ces calculs supposent $p < 2R$; c'est donc la condition de rencontre du cercle et de la parabole, ce qui était évident géométriquement.

Quand p varie de o à $2R$, $\frac{T'}{T}$ se présente sous la forme d'un produit de deux facteurs positifs dont la somme est constante. $\frac{T'}{T}$ commence donc par croître, à partir de $\frac{\sqrt{2}}{3\pi}$, pour décroître ensuite jusqu'à zéro ; le

maximum a lieu pour

$$\frac{p+R}{1} = \frac{2R-p}{\frac{1}{2}} = \frac{3R}{\frac{3}{2}}, \qquad \frac{T'}{T} = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}.$$

4° Dans ce cas,

$$T = 365^j,25 \text{ environ},$$

$$T' \leqq \frac{2\sqrt{2}}{3\pi} \times 365,25 = 109^j,6 \text{ environ}.$$

ERRATA.

4e série, t. XI, 1911, p. 438, ligne 16, *au lieu de :*

Il est facile de montrer que toute solution du système (1) est une solution du problème,

Lire :

Il est facile de montrer que le système (1) admet une solution du problème.

Même Tome, p. 440, *au lieu de :*

Nous avons montré que toute solution du système (1) est une solution du problème,

Lire :

Nous avons montré que le système (1) admet une solution du problème.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME XI, 4e SÉRIE.)

La classification adoptée est celle de l'Index du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*.

Analyse mathématique.

		Pages.
A3e	Discussion des équations de degré 2, 3, 4, 5, au point de vue des racines multiples; par M. *G. Fontené*	340
A3g	Sur l'erreur commise dans le calcul approché d'une racine d'équation par la méthode de Newton; par M. *Armand Denjoy*	266
B1c	Démonstration d'un théorème de Kummer sur un type de déterminants; par M. *Th. Got*	274
B4b	Semi-invariants d'un polynome; par M. *G. Fontené*	337
C1a	Note sur les déterminants de Wronsky; par M. *G. Valiron*	151
C2a	Sur l'intégration des fractions rationnelles; par M. *G. Fontené*	529
D1d	Sur les polynomes $U_{m,n} = \frac{1}{2^{m+n} m! n!} \frac{\partial^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}$; par M. *Willigens*	97
D2aα	Note sur la règle de Duhamel; par M. *G. Valiron*	137
D2aα	Démonstration d'un théorème sur les séries à termes positifs; par M. *Armand Denjoy*	272
D2b	Note sur les séries alternées; par M. *G. Valiron*	136
D2bα	Sur quelques séries; par M. *E.-N. Barisien*	200

Pages.

D4a Sur les fonctions entières d'ordre nul; par M. *G. Valiron* 448

D4a Sur la dérivée logarithmique de certaines fonctions entières; par M. *G. Valiron* 498

D4b Le théorème de M. Picard pour les fonctions entières d'ordre nul; par M. *G. Valiron* 145

D4c Sur le développement de Taylor d'une fonction méromorphe; par M. *G. Valiron* 18

H11c Sur la résolution de l'équation intégrale à noyau symétrique; par M. *A. Proszynski* ... 394

H11c Une application de l'équation fonctionnelle de Fredholm; par M. *Ch. Platrier* 508

I2e Généralisation d'une formule de Laplace relative aux probabilités des erreurs; par M. *Monfraix*. 302

I7a Sur une question proposée par M. Fontené; par M. *E. Cahen* 70

I23a Continuants : applications à la théorie des nombres (*suite et fin*); par M. *A. Deltour* .. 116

Géométrie.

$K^1$18g Sur les coordonnées pentasphériques générales; par M. *J. Haag* 49

$L^1$6a Sur le centre de courbure en un point conique; par M. *G. Valiron* 277

$L^1$10b Recherches géométriques sur les normales à une parabole issues d'un même point; par M. *J. Plane* 241

$L^2$10a Note sur les quadriques homofocales; par M. *M.-F. Egan* 420

$M^1$5i Sur un faisceau de strophoïdes; par M. *R. Bouvaist* 551

$M^1$6g Sur les triangles inscrits et circonscrits à une cartésienne; par M. *R. Bouvaist* 408

$M^2$9e Sur certaines surfaces généralisant la chaînette de Coriolis; par M. *E. Turrière* 385

$M^3$6b Sur la courbure des biquadratiques gauches de première espèce; par M. *C. Servais* 289

$M^4$5j Sur la quatrième congruence de cubiques gauches de M. Stuyvaert; par M. *Lucien Godeaux* .. 1

$N^1$1f Sur un complexe quadratique dont tous les cônes sont de révolution; par M. *E. Turrière*. 308

$N^1$1j Sur un complexe du quatrième ordre; par M. *E. Turrière* 205

$O^1$5j Sur les lignes asymptotiques de certaines surfaces de révolution; par M. *V. Jamet* 129

Pages.

O¹5j Sur les courbes planes qui sont à elles-mêmes leurs polaires réciproques; par M. *Paul Suchar*..... 433

O¹5l, O¹6h Sur les lignes géodesiques et les surfaces minima; par M. *M. Fouché*..... 153

O¹5n Surfaces engendrées par le déplacement d'une courbe plane indéformable, de telle sorte qu'il existe un cône circonscrit le long de la courbe; par M. *E. Keraval*..... 481

O¹7a Une application du théorème de Malus au problème de Transon; par M. *E. Turrière*..... 160

O¹7a Sur les congruences de droites qui admettent un point pour surface centrale; par M. *E. Turrière*..... 165

O¹7a Détermination des complexes dont les surfaces résolvantes sont de révolution et coaxiales; par M. *E. Turrière*..... 262

O¹8c Sur une application de la théorie du trièdre mobile; par M. *J. Haag*..... 67

Mathématiques appliquées.

R4a2 Sur la poulie fixe; par M. *L. Zoretti*..... 213

R6a Application du théorème de M. Appell sur le moment de la quantité de mouvement par rapport à un complexe d'un mobile soumis à une force appartenant à ce complexe. Généralisation de l'équation de Clairaut; par M. *Ch. Plâtrier*..... 355

X4c Sur les moments d'une aire plane; par M. *L. Zoretti*..... 547

X6 Sur le planimètre de Pritz; par M. *E. Doucet*. 193

Certificats d'études supérieures des Facultés des Sciences.

Analyse supérieure..... 175

Mathématiques générales..... 149, 423, 462, 524

Géométrie supérieure..... 179

Mécanique rationnelle..... 88, 222

Questions de concours.

Agrégation des Sciences mathématiques (concours de 1910). Composition sur le Calcul différentiel et intégral; solution par M. *E. Turrière*..... 21

Pages.

Agrégation des Sciences mathématiques (concours de 1910). Question de Mathématiques spéciales; solution par M. *E. Turrière* 72

Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1911; solution par M. *Jean Servais* 314

Agrégation des Sciences mathématiques (concours de 1911). Composition de Mathématiques élémentaires; solution par *un Anonyme* 358

Concours d'admission à l'École Normale supérieure et aux bourses de licence en 1911; solution par M. *H. L.* 558

Correspondance.

M. E.-N. Barisien : Sur six hyperboles remarquables d'un triangle 87

M. E.-N. Barisien : Sur un problème de progressions 221

M. L. Klug : Sur la question 2166 222

M. E.-N. Barisien : Résolution d'équations au moyen d'identités 280

M. Joseph Joffroy : Sur une propriété arithmétique 282

M. E.-N. Barisien : Sur le triangle équilatéral minimum inscrit dans un triangle ABC 328

M. L. Klug : A propos de la question 2155 422

M. M. O. : Au sujet d'un article de M. Valiron 524

Bibliographie.

Paul Montel : Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe; Compte rendu par M. *S. Lattès* 81

G. Vivanti : Les fonctions polyédriques et modulaires; traduit par A. Cahen; Compte rendu par M. *A. Boulanger* 84

J. Sommer : Introduction à la théorie des nombres algébriques, traduit par A. Lévy; Compte rendu par M. *Th. Got* 279

R. de Montessus et R. d'Adhémar : Calcul numérique 329

Questions proposées.

2169 à 2180 93

2181 et 2182 384

2183 et 2184 480

Solutions de questions proposées.

1579, par M. *G. Polya* 377

1580, par M. *G. Polya* 381

1661, par M. *G. Polya* 382

Pages.
1945, par M. *A. B* 283
2084, par M. *R. Bouvaist* 183
2097, par M. *G. Fontené* 526
2127, par M. *R. Bouvaist* 40
2140, par M. *Parrod* 41
2142, par M. *R. Bouvaist* 42
2143, par M. *R. Bouvaist* 42
2144, par M. *R. B* 187
2146, par M. *Thié* 44
2147, par M. *Thié* 46
2148, par M. *Thié* 43
2149, par M. *Thié* 188
2150, par M. *R. Bouvaist* 190
2153, par M. *Klug* 192
2154, par M. *Klug* 239
2155, par MM. *Klug et Barisien* 330
2157, par M. *Thié* 285
2158, par M. *Thié* 286
2159, par M. *Parrod* 287
2161, par M. *Parrod* 288
2163, par M. *R. Bouvaist* 471
2164, par M. *R. Bouvaist* 473
2169, par M. *N. Abramescu* 475
2170, par M. *M. O* 431
2171, par MM. *Abramescu et R. Bouvaist* 477
Errata 336, 432, 528, 576

TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS.

(TOME XI, 4e SÉRIE.)

N. Abramescu, 384, 475, 478, 480.

A. B., 283.
R. B., 46, 187.
E.-N. Barisien, 43, 44, 87, 96, 188, 191, 192, 200, 221, 239, 280, 328, 332, 480.
A. Boulanger, 86.
R. Bouvaist, 40, 43, 183, 191, 388, 472, 474, 479.

E. Cahen, 70.
E. Cesaro, 377, 381, 382.
Cuny, 40, 41.

A. Deltour, 116.
A. Denjoy, 266, 272.
E. Doucet, 193.
A. Duby, 94, 432.

F. Egan, 420.

G. Fontené, 183, 285, 286, 337, 340, 472, 527.
M. Fouché, 153.

Giraudon, 95.
L. Godeaux, 1.
Th. Got, 274, 280.

J. Haag, 49, 67.

V. Jamet, 129.
J. Joffroy, 282.

E. Kerayal, 481.
L. Klug, 42, 43, 44, 94, 192, 222, 239, 287, 303, 422, 478.

S. Lattès, 84.
Lez, 44.

Monfraix, 302.

O., 432, 524.
d'Ocagne, 93, 288, 475.

Parrod, 41, 287, 288.
A. Petot, 283.
J. Plane, 241.
Ch. Platrier, 355, 408.
G. Polya, 377, 382, 383.
A. Proszynski, 394.

L. Quentin de la Roere, 514.

C. Servais, 289.
J. Servais, 314.
P. Sondat, 42, 94, 95.
P. Suchar, 433.

V. Thebault, 187.
Thie, 42, 43, 44, 46, 189, 285, 286.
E. Turrière, 21, 72, 160, 165, 205, 262, 308, 385.

G. Valiron, 18, 136, 137, 145, 151, 277, 448, 498.

Willigens, 97.

L. Zoretti, 213.

46612 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

QA
1
N8
v.70

Nouvelles annales
de mathématiques

Physical &
Applied Sci.
Serials

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY